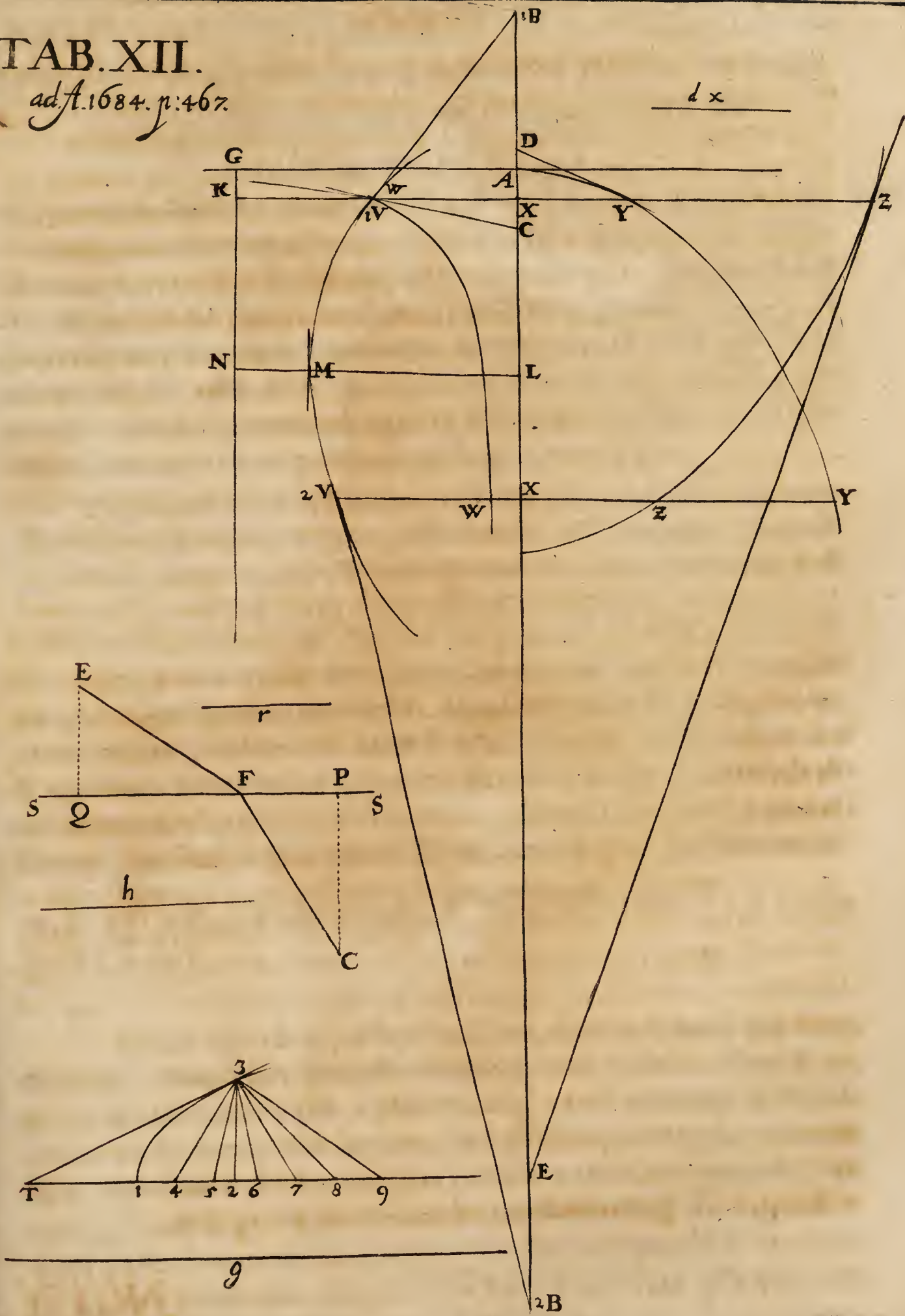


TAB. XII.

ad A. 1684. p. 467.



11/8/78
August



NOVA METHODUS PRO MAXIMIS

& minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrati-
onales quantitates moratur, & singulare pro illis
calculi genus, per G. G. L.

Sit axis AX, & curvæ plures; ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordi-
natæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respec-
tively, v, vv, y, z ; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x . Tangentes sint
VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E.
Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx , & recta quæ sit ad
 dx , ut v (vel vv , vel y , vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vo-
cetur $d v$ (vel $d vv$, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsa-
rum vv , aut y , aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

TAB. XII

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & $da x$ erit æqu.
 $a dx$: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis or-
dinatæ respondententi curvæ VV) erit dy æqu. dv . Jam *Additio & Sub-*
tractio: si sit $z = y + vv + x$ æqu. v , erit $dz = dy + dv + dx$ seu dv , æqu.
 $dz = dy + dv + dx$. *Multiplicatio*, $dx v$ æqu. $x dv + v dx$, seu posito
 y æqu. $x v$, fiet dy æqu. $x dv + v dx$. In arbitrio enim est vel formulam,
ut $x v$: vel compendio pro ea literam, ut y , adhibere. Notandum & x
& dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy , vel aliam literam
indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari
semper regressum a differentiali Equatione, nisi cum quadam cautio-
ne, de quo alibi. Porro *Divisio*, $\frac{d^p}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{p}{y}$) $\frac{dz}{y}$ æqu.
 $\frac{v dy + y dv}{y}$

YY

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera
substituatur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa,
& pro $+ z$ scribi $+ dz$, pro $- z$ scribi $- dz$, ut ex additione & subtra-
ctione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegefin valorum
venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x , tunc apparere, an
valor ipsius dz sit quantitas affirmatiya, an nihilo minor seu negativa:
quod posterius cum sit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non ver-
sus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

2 decrefcunt crefcentibus x. Et quia ipfæ ordinatæ v modo crefcunt, modo decrefcunt, erit $d v$ modo affirmativa modo negativa quantitas, & priore cafu $I V I B$ tangens ducitur verfus A ; posteriore 2 $V_2 B$ in partes averfas: neutrum autem fit in medio circa M , quo momento ipfæ v neque crefcunt neque decrefcunt, fed in ftatu funt, adeoque fit $d v$ æqu. 0, ubi nihil refert quantitas fit ne affirmativa an negativa, nam $+ 0$ æqu. $-- 0$: eoque in loco ipfa v , nempe ordinata $L M$, eft *maxima* (vel fi convexitatem Axi obverteret, *Minima*) & tangens curvæ in M neque fupra X ducitur ad partes A ibique axi propinquat, neque infra X ad partes contrarias, fed eft axi parallela. Si $d v$ fit infinita refpectu ipfius $d x$, tunc tangens eft ad axem recta, feu eft ipfa ordinata. Si $d v$ & $d x$ æquales, tangens facit angulum femirectum ad axem. Si crefcentibus ordinatis v , crefcunt etiam ipfæ earum incrementa vel differentia, $d v$; (feu fi pofitis $d v$ affirmativis etiam $d d v$ differentia differentiarum funt affirmativæ, vel negativis negativæ) curva axi obvertit *concavitatem*; alias *convexitatem*: ubi vero eft maximum vel minimum incrementum, vel ubi incrementa ex decrefcantibus fiunt crefcentia aut contra, ibi eft *punctum flexus contrarii*, & concavitas atque convexitas inter fe permutantur, modo non & ordinatæ ibi ex crefcentibus fiant decrefcantes, vel contra, tunc enim concavitas aut convexitas maneret: ut autem crementa continuent crefcere aut decrefcere, ordinatæ vero ex crefcentibus fiant decrefcantes vel contra, fieri non poteft. Itaque punctum flexus contrarii locum habet, quando neque v neque $d v$ exiftente 0, tamen $dd v$ eft 0. Unde etiam problema flexus contrarii non duas ut problema maximæ, fed tres habet radices æquales. Atque hæc omnia quidem pendent a recto ufu fignorum.

Interdum autem adhibenda funt *Signa Ambigua*, ut nuper in *divifione*, antequam fcilicet confitet quomodo explicari debeant. Et

quidem fi crefcentibus x , crefcunt (decrefcunt) --- debent figna ambigua,

bigua in $d \frac{+vdy - ydv}{yy}$ ita explicari, ut hæc fractio fiat quantitas affirmativa (negativa). Significat autem $+$ contrarium ipfius $+$, ut fi hoc fit $+$ illud fit $--$, vel contra. Poffunt & in eodem calculo occurrere plures ambiguitates, quas diftinguo parenthefibus, exempli

pli causa si esset $\frac{p}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{p}$ æqu. vv, foret $\frac{Xpdy + ydv}{zz} + \frac{((+) y dz + (-) z dy + ((+) x dp + (-) v dx)}{vv}$ æqu. d vv, alioqui

ambiguitates ex diversis capitibus ortæ confunderentur. Ubi notandum signum ambiguum in se ipsum ductum dare +, in suum contrarium dare --, in aliud ambiguum formare novam ambiguitatem ex ambabus dependentem.

Potentia d X^a , æqu. a. $X^{a-1} dx$, exempli gratia d, X_3 æqu. $3X_2 dx$
 $\frac{d}{dX^a}$ æqu. -- $\frac{a dx}{X^{a+1}}$ ex gr. si vv sit æqu. $\frac{1}{X_3}$ fiet d vv æqu. -- $\frac{3 dx}{X_4}$

Radices: d, $\sqrt{X^a}$, æqu. $\frac{b}{b dx} \sqrt{X^{a-b}}$ (Hinc d $\sqrt[2]{y}$ æqu. $\frac{2}{2} \sqrt[2]{y}$
 nam eo casu a est 1, & b est 2; ergo -- $\frac{b}{b} \sqrt{X^{a-b}}$ est -- $\frac{2}{2} \sqrt{Y_{-1}}$ jam Y_{-1} idē

est quod -- ex natura exponentium progressionis Geometricæ, & y ,

$\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$ est $\frac{1}{\sqrt[2]{Y}}$ d $\frac{1}{b} \sqrt[2]{X^a}$ æqu. $\frac{-b dx}{b X^{b-a}}$. Suffecisset autem regula potentia integræ tam ad fractas quam ad radices determinandas, potentia enim fit fracta cum exponens est negativus, & mutatur in radicem cum exponens est fractus, sed malui consequentias istas ipse deducere, quam aliis deducendas relinquere, cum sint admodum generales, & crebro occurrentes, & in re per se implicita præstet facilitati consulere.

Ex cognitō hoc velut *Algorithmo*, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco *differentialē*, omnes aliæ æquationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, maximæque & minimæ, itemque tangentes haberi, ita ut opus non sit tolli fractas aut irrationales, aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hætenus editas. Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato, & hoc unum hætenus non satis expensum consideranti, ipsas dx, dy, dv, dyv, dz, ut ipsarum x, y, v, vv, z (cujusque in sua serie) differentiis sive incrementis vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse. Unde fit ut propositā quacunque æquatione scribi possit ejus æquatio differentialis

alis, quod fit pro quolibet *membro* (id est parte, quæ sola additione vel subtractione ad æquationem constituendam concurrit) substituendo simpliciter quantitatem membri differentialem, pro alia vero quantitate, (quæ non ipsa est membrum, sed ad membrum formandum concurrit) ejus quantitatem differentialem ad formandam quantitatem differentialem ipsius membri adhibendo, non quidem simpliciter, sed secundum Algorithmum hætenus præscriptum. Editæ vero hætenus Methodi talem transitum non habent, adhibent enim plerumque rectam ut DX, vel aliam hujusmodi, non vero rectam dy quæ ipsis DX, XY, dx est quarta proportionalis, quod omnia turbat; hinc præcipiunt ut fractæ & irrationales (quas indeterminatæ ingrediuntur) prius tollantur, patet etiam methodum nostram porrigi ad lineas transcendentes, quæ ad calculum Algebraicum revocari non possunt, seu quæ nullius sunt certi gradus, idque universalissimo modo, sine ullis suppositionibus particularibus non semper succedentibus, modo teneatur in genere, *tangentem* invenire, esse rectam ducere, quæ duo curvæ puncta distantiam infinite parvam habentia, jungat, seu latus productum polygoni infinitanguli, quod nobis *curvæ* æquivalet. Distantia autem illa infinite parva semper per aliquam differentialem notam, ut dz, vel per relationem ad ipsam exprimi potest, hoc est per notam quandam tangentem. Speciatim, si esset y, quantitas transcendens exempli causa ordinata cycloëidis, eaque calculum ingrederetur, cujus ope ipsa Z ordinata alterius curvæ esset determinata, & quæreretur dz seu per eam tangens hujus curvæ posterioris, utique determinanda esset dz per dy, haberetur autem dy, quia habetur tangens cycloëidis. Ipsa autem tangens cycloëidis, si nondum haberi fingetur, similiter calculo inveniri posset ex data proprietate tangentium circuli.

Placet autem exemplum calculi proponere, ubi notetur me divisionem hic designare hoc modo, $x : y$ quod idem est ac x divis. per y

seu --. Sit æquatio *prima* seu data, $x : y + a + bx - xx : \text{quadrat.}$

$\frac{x}{y} + \frac{cx + fxx + ax}{\sqrt{gg + yy + yy}} : \frac{hh + lx + mxx}{\sqrt{hh + lx + mxx}} \text{ æqu. o.}$
 exprimens relationem inter x & y seu inter AX & XY, posito ipsas a, b, c, c, f, g, h, l, m esse datas; quæritur modus ex dato puncto Y educendi

YD

YD quæ curvam tangat, seu quæritur ratio rectæ DX ad rectam datam XY. Compendii causa pro a $\pm$ b x scribamus n; pro c $-xx$, p; pro ex $\pm$ fxx, q; pro g g $\pm$ y y, r; pro h h $\pm$ l x $\pm$ m x x, s, fiet x: y $\pm$ n p: q q $\pm$ a x $\sqrt{r \pm y y}$: $\sqrt{s}$ æqu. o. Quæ sit *Æquatio Secunda*. Jam ex calculo nostro constat d, x: y esse $\pm x d y \mp y d x$; yy; & similiter d, n p: q q esse $(\pm) 2 n p d q (\mp) q n d p \pm p d n$; q³ & d, a x $\sqrt{r}$ esse $-a x d r$: $2 \sqrt{r} \pm a d x \sqrt{r}$; & d, y y: $\sqrt{s}$ esse $((\pm)) y y d s ((\mp)) 4 y s d y$; $2 s \sqrt{s}$, quæ omnes quantitates differentiales inde ab ipso d, x: y usq; ad d, y y: $\sqrt{s}$ in unum additæ, facient o, & dabunt hoc modo *Æquationem tertiam*, ita enim pro membris secundæ æquationis substituantur quantitates eorum differentiales. Jam d n est b d x, & d p est $-2 x d x$, & d q est e d x $\pm 2 f x d x$, & d r est 2 y d y, & d s est l d x $\pm 2 m x d x$. Quibus valoribus in *Æquatione* tertia substitutis habebitur æquatio *quarta*, ubi quantitates differentiales quæ solæ supersunt, nempe dx, dy, semper reperiuntur extra nominatores & vincula, & unum quodque membrum afficitur vel per dx vel per dy, servata semper lege homogeneorum quoad has duas quantitates, quomodocunque implicatus sit calculus; unde semper haberi potest valor ipsius dx: dy seu rationis dx ad dy hoc est DX quæsitæ ad XY datam, quæ ratio in hoc nostro calculo (mutando æquationem quartam in Analogiam) erit ut $\pm x: y \pm a x y: \sqrt{r} ((\pm)) 2 y: \sqrt{s}$ est ad $\pm 1: y ((\pm)) 2 n p e \pm 2 f x: q ((\pm)) -2 n x \pm p b: q q \pm a \sqrt{r} ((\pm)) y y l \pm 2 m x: 2 s \sqrt{s}$. Dantur autem x & y ex dato puncto Y. Dantur & valores supra scripti literarum n, p, q, r, s, per x & y. Habetur ergo quæsitum. Atque hoc exemplum satis implicatum ideo tantum ascripsimus, ut modus superioribus regulis in calculo etiam difficiliore utendi appareret. Nunc præstat usum in exemplis intellectui magis obviis ostendere.

Data sint duo puncta C & E, & recta SS in eodem cum ipsis plano, quæritur punctum F in recta SS ita sumendum, ut junctis CF, FE, sit aggregatum rectangulorum, CF in datam h, & FE in datam r, omnium possibile minimum, hoc est si SS sit mediorum separatrix, & h repræsentet densitatem medii, ut aquæ, a parte C & r densitatem medii ut aeris, a parte E, quæritur punctum F tale, ut via a C ad E per F sit omnium possibile facillima. Ponamus omnia ista rectangulorum aggregata possible, vel omnes viarum possibile difficultates, re-

præsentari per ipsas KV , curvæ VV ordinatas ad rectam GK normales, quas vocabimus ω , quærique minimam earum, NM . Quia dantur puncta C & E , dabuntur & perpendiculares ad SS nempe CP (quam vocabimus c) & EQ (quam e) & præterea PQ (quam p) ipsam autem QF quæ sit æqualis ipsi GN (vel AX) vocabimus x , & CF , f ; & EF , g ; fiet FP , $p - x$; fæqu. $\sqrt{cc + pp - 2px + xx}$, seu compendio $\sqrt{l}$, & g æq. $ee + xx$ seu compendio $\sqrt{m}$. Habemus ergo ω æqu $h \sqrt{l + r} \sqrt{m}$, cujus æquationis æquatio differentialis (posito $d\omega$ esse o , in casu minimæ) est o æqu. $-h dl : 2 \sqrt{l - r} dm : 2 \sqrt{m}$ per regulas calculi nostri traditas; jam $d l$ est $-2 dx - p + x$, & $d m$ est $2 x dx$, ergo fit: $h p - x : f$ æqu. $rx : g$. quod si jam hæc accommodentur ad dioptricam, & ponantur f & g , seu CF & EF æquales, quia eadem manet refractionis in puncto F quantacunque ponatur longitudo rectæ CF , fiet $h p - x$ æqu. rx , seu $h : r :: x : p - x$, seu h ad r ut QF ad FP , hoc est sinus angulorum incidentiæ & refractionis FP & QF erunt reciproce ut r & h , densitates mediorum in quibus fit incidentia & refractionis. Quæ densitas tamen non respectu nostri, sed respectu resistentiæ quam radiis lucis faciunt intelligenda est. Et habetur ita demonstratio calculi, alibi a nobis in his ipsis Actis exhibiti, quando generale Opticæ, Catoptricæ & Dioptricæ fundamentum exponebamus. Cum alii doctissimi Viri multis ambagibus venati sint, quæ hujus calculi peritus tribus lineis impofterum præstabit. Quod alio adhuc exemplo docebo. Sit curva 133 talis naturæ, ut a puncto ejus quocunque ut 3 ductæ ad sex puncta fixa in axe posita, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sex rectæ 34, 35, 36, 37, 38, 39 simul additæ, sint rectæ datæ g , æquales. Sit axis $T14526789$, & 12 sit abscissa, 23 ordinata, quæritur tangens 3 T , dico fore $T2$ ad 23 ut $\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \frac{23}{37} + \frac{23}{38} + \frac{23}{39}$ est ad $-\frac{24}{34} - \frac{25}{35} + \frac{26}{36} + \frac{27}{37} + \frac{28}{38} + \frac{29}{39}$. Eademque erit regula, continuatis tantum terminis, si non sex sed decem vel plura puncta fixa supponerentur, qualia secundum methodos tangentium editas calculo præstare sublatis irrationalibus, & radiosissimæ & aliquando insuperabilis operæ foret, ut si rectangula plana vel solida secundum omnes biniones vel terniones possibiles ex rectis illis composita datæ quantitati æquari deberent; in quibus omnibus, & multo implicationioribus, methodi nostræ eadem est opinione multo major, rarissimique exempli facilitas. Et hæc quidem