

VORTRÄGE VON DER 80. NATURFORSCHERVERSAMM- LUNG ZU KÖLN.

H. Minkowski (Göttingen), Raum und Zeit¹⁾.

M. H.! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit behalten.

I.

Ich möchte zunächst ausführen, wie man von der gegenwärtig angenommenen Mechanik wohl durch eine rein mathematische Überlegung zu veränderten Ideen über Raum und Zeit kommen könnte. Die Gleichungen der Newtonschen Mechanik zeigen eine zweifache Invarianz. Einmal bleibt ihre Form erhalten, wenn man das zugrunde gelegte räumliche Koordinatensystem einer beliebigen Lageveränderung unterwirft, zweitens, wenn man es in seinem Bewegungszustande verändert, nämlich ihm irgendeine gleichförmige Translation aufprägt; auch spielt der Nullpunkt der Zeit keine Rolle. Man ist gewohnt, die Axiome der Geometrie als erledigt anzusehen, wenn man sich reif für die Axiome der Mechanik fühlt, und deshalb werden jene zwei Invarianzen wohl selten in einem Atemzuge genannt. Jede von ihnen bedeutet eine gewisse Gruppe von Transformationen in sich für die Differentialgleichungen der Mechanik. Die Existenz der ersteren Gruppe sieht man als einen fundamentalen Charakter des Raumes an. Die zweite Gruppe straft man am liebsten mit Verachtung, um leichten Sinnes darüber hinwegzukommen, daß man von den physikalischen Erscheinungen her niemals entscheiden kann, ob der als ruhend vorausgesetzte Raum

sich nicht am Ende in einer gleichförmigen Translation befindet. So führen jene zwei Gruppen ein völlig getrenntes Dasein nebeneinander. Ihr gänzlich heterogener Charakter mag davon abgeschreckt haben, sie zu komponieren. Aber gerade die komponierte volle Gruppe als Ganzes gibt uns zu denken auf.

Wir wollen uns die Verhältnisse graphisch zu veranschaulichen suchen. Es seien x, y, z rechtwinklige Koordinaten für den Raum und t bezeichne die Zeit. Gegenstand unserer Wahrnehmung sind immer nur Orte und Zeiten verbunden. Es hat niemand einen Ort anders bemerkt als zu einer Zeit, eine Zeit anders als an einem Orte. Ich respektiere aber noch das Dogma, daß Raum und Zeit je eine unabhängige Bedeutung haben. Ich will einen Raumpunkt zu einem Zeitpunkt, d. i. ein Wertsystem x, y, z, t einen Weltpunkt nennen. Die Mannigfaltigkeit aller denkbaren Wertsysteme x, y, z, t soll die Welt heißen. Ich könnte mit kühner Kreide vier Weltachsen auf die Tafel werfen. Schon eine gezeichnete Achse besteht aus lauter schwingenden Molekülen und macht zudem die Reise der Erde im All mit, gibt also bereits genug zu abstrahieren auf; die mit der Anzahl 4 verbundene etwas größere Abstraktion tut dem Mathematiker nicht wehe. Um nirgends eine gährende Leere zu lassen, wollen wir uns vorstellen, daß aller Orten und zu jeder Zeit etwas Wahrnehmbares vorhanden ist. Um nicht Materie oder Elektrizität zu sagen, will ich für dieses Etwas das Wort Substanz brauchen. Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf den Weltpunkt x, y, z, t vorhandenen substantiellen Punkt und stellen uns vor, wir sind instände, diesen substantiellen Punkt zu jeder anderen Zeit wieder zu erkennen. Einem Zeitelement dt mögen die Änderungen dx, dy, dz der Raumkoordinaten dieses substantiellen Punktes entsprechen. Wir erhalten dann als Bild sozusagen für den ewigen Lebenslauf des substantiellen Punktes eine Kurve in der Welt, eine Weltlinie, deren Punkte sich eindeutig auf den Parameter t von $-\infty$ bis $+\infty$ beziehen lassen. Die ganze Welt erscheint aufgelöst in solche Weltlinien, und ich möchte sogleich vorwegnehmen, daß meiner Meinung nach die physikalischen Gesetze ihren vollkommensten Ausdruck als Wechselbeziehungen unter diesen Weltlinien finden dürften.

Durch die Begriffe Raum und Zeit fallen die x, y, z -Mannigfaltigkeit $t=0$ und die t -Achse auseinander. Halten wir der Einfach-

1) Wenige Tage vor Beginn der Weihnachtsferien erzählte mir Minkowski, daß er soeben das verprochene Manuskript seines Vortrages an die Redaktion der Physikalischen Zeitschrift abgesandt habe; vier Tage vor seinem Tode sprach ich mit ihm über den Inhalt der Arbeit. Niemand, der den jugendkräftigen, schaffensfrohen Mann sah, konnte ahnen, daß der Tod schon seinen schwarzen Flügel über ihn gebreitet hatte. Mit ungewöhnlichem Glanze hatte die wissenschaftliche Laufbahn Minkowskis begonnen. Erst 19 Jahre alt errang er mit einer zahlentheoretischen Arbeit den großen Preis der Pariser Akademie. Aus neuen Bahnen, aus Arbeiten von tiefster Wirkung, als deren Ziel ein neues, einheitlicheres physikalisches Bild der Welt ihm erschien, hat ein tragisches Geschick ihn hinweggerafft. Aber ihm selber war es noch in den letzten Stunden seines Lebens ein tröstlicher Gedanke, daß seine Ideen in der Wissenschaft leben, daß andere Hände an seinen Theorien weiter bauen werden. In unserer Erinnerung aber wird er leben nicht bloß als der geniale Mathematiker, sondern auch als der lebenswerte und anspruchslose, hilfsbereite und gute Mensch.

(E. R.)

heit wegen den Nullpunkt von Raum und Zeit fest, so bedeutet die zuerst genannte Gruppe der Mechanik, daß wir die x, y, z -Achsen in $t=0$ einer beliebigen Drehung um den Nullpunkt unterwerfen dürfen, entsprechend den homogenen linearen Transformationen des Ausdrucks

$$x^2 + y^2 + z^2$$

in sich. Die zweite Gruppe aber bedeutet, daß wir, ebenfalls ohne den Ausdruck der mechanischen Gesetze zu verändern,

$$x, y, z, t \text{ durch } x - \alpha t, y - \beta t, z - \gamma t, t$$

mit irgendwelchen Konstanten α, β, γ ersetzen dürfen. Der Zeitachse kann hiernach eine völlig beliebige Richtung nach der oberen halben Welt $t > 0$ gegeben werden. Was hat nun die Forderung der Orthogonalität im Raume mit dieser völligen Freiheit der Zeitachse nach oben hin zu tun?

Die Verbindung herzustellen, nehmen wir einen positiven Parameter c und betrachten das Gebilde

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Es besteht aus zwei durch $t=0$ getrennten Schalen nach Analogie eines zweischaligen Hyperboloids. Wir betrachten die Schale im Gebiete $t > 0$, und wir fassen jetzt diejenigen homogenen linearen Transformationen von x, y, z, t in vier neue Variable x', y', z', t' auf, wobei der Ausdruck dieser Schale in den neuen Variablen entsprechend wird. Zu diesen Transformationen gehören offenbar die Drehungen des Raumes um den Nullpunkt. Ein volles Verständnis der übrigen jener Transformationen erhalten wir hernach bereits, wenn wir eine solche unter ihnen ins Auge fassen, bei der y und z ungeändert bleiben. Wir zeichnen den Durchschnitt jener Schale mit der Ebene der x - und der t -Achse, den oberen Ast der Hyperbel $c^2 t^2 - x^2 = 1$, mit seinen Asymptoten

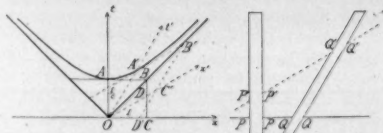


Fig. 1.

(Fig. 1). Ferner werde ein beliebiger Radiusvektor OA' dieses Hyperbelastes vom Nullpunkt O aus eingetragen, die Tangente in A' an die Hyperbel bis zum Schnitte B' mit der Asymptote rechts gelegt, OAB' zum Parallelogramm $OABC'$ vervollständigt, endlich für das spätere noch BC' bis zum Schnitte D' mit der x -Achse durchgeführt. Nehmen wir nun OC' und OA' als Achsen für Parallelkoordinaten x', t' mit den Maßstäben $OC'=1$,

$OA'=1/c$, so erlangt jener Hyperbelast wieder den Ausdruck $c^2 t'^2 - x'^2 = 1$, $t' > 0$, und der Übergang von x, y, z, t zu x', y', z', t' ist eine der fraglichen Transformationen. Wir nehmen nun zu den charakterisierten Transformationen noch die beliebigen Verschiebungen des Raum- und Zeit-Nullpunktes hinzu und konstituieren damit eine offenbar noch von dem Parameter c abhängige Gruppe von Transformationen, die ich mit G_c bezeichne.

Lassen wir jetzt c ins Unendliche wachsen, also $1/c$ nach Null konvergieren, so leuchtet an der beschriebenen Figur ein, daß der Hyperbelast sich immer mehr der x -Achse anschmiegt, der Asymptotenwinkel sich zu einem gestreckten verbreitert, jene spezielle Transformation in der Grenze sich in eine solche verwandelt, wobei die t' -Achse eine beliebige Richtung nach oben haben kann und x' immer genauer sich an x annähert. Mit Rücksicht hierauf ist klar, daß aus der Gruppe G_c in der Grenze für $c = \infty$, also als Gruppe G_∞ , eben jene zu der Newtonschen Mechanik gehörige volle Gruppe wird. Bei dieser Schlage und da G_c mathematisch verständlicher ist als G_∞ , hätte wohl ein Mathematiker in freier Phantasie auf den Gedanken verfallen können, daß am Ende die Naturerscheinungen tatsächlich eine Invarianz nicht bei der Gruppe G_∞ , sondern vielmehr bei einer Gruppe G_c mit bestimmtem endlichen, nur in den gewöhnlichen Maßeinheiten äußerst großen c besitzen. Eine solche Ahnung wäre ein außerordentlicher Triumph der reinen Mathematik gewesen. Nun, da die Mathematik hier nur mehr Treppwitz bekundet, bleibt ihr doch die Genußung, daß sie dank ihren glücklichen Antezedenzen mit ihren in freier Fernsicht geschärften Sinnen die tiefgreifenden Konsequenzen einer solchen Ummodellung unserer Naturauffassung auf der Stelle zu erfassen vermag.

Ich will sogleich bemerken, um welchen Wert für c es sich schließlich handeln wird. Für c wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume eintreten. Um weder vom Raum, noch von Leere zu sprechen, können wir diese Größe wieder als das Verhältnis der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheit der Elektrizitätsmenge kennzeichnen.

Das Bestehen der Invarianz der Naturgesetze für die bezügliche Gruppe G_c würde nun so zu fassen sein:

Man kann aus der Gesamtheit der Naturerscheinungen durch sukzessiv gesteigerte Approximationen immer genauer ein Bezugssystem x, y, z und t , Raum und Zeit, ableiten, mittels dessen die Erscheinungen sich dann nach bestimmten Gesetzen darstellen. Dieses Bezugssystem ist dabei aber durch die Erscheinungen

keineswegs eindeutig festgelegt. Man kann das Bezugssystem noch entsprechend den Transformationen der genannten Gruppe G_c beliebig verändern, ohne daß der Ausdruck der Naturgesetze sich dabei verändert.

Z. B. kann man der beschriebenen Figur entsprechend auch t' Zeit benennen, muß dann aber im Zusammenhange damit notwendig den Raum durch die Mannigfaltigkeit der drei Parameter x', y', z' definieren, wobei nun die physikalischen Gesetze mittels x', y', z', t' sich genau ebenso ausdrücken würden, wie mittels x, y, z, t . Hiernach würden wir dann in der Welt nicht mehr den Raum, sondern unendlich viele Räume haben, analog wie es im dreidimensionalen Raume unendlich viele Ebenen gibt. Die dreidimensionale Geometrie wird ein Kapitel der vierdimensionalen Physik. Sie erkennen, weshalb ich am Eingange sagte, Raum und Zeit sollen zu Schatten herabsinken und es soll nur eine Welt an sich bestehen.

II.

Nun ist die Frage, welche Umstände zwingen uns die veränderte Auffassung von Raum und Zeit auf, widerspricht sie tatsächlich niemals den Erscheinungen, endlich gewährt sie Vorteile für die Beschreibung der Erscheinungen?

Bevor wir hierauf eingehen, sei eine wichtige Bemerkung vorangestellt. Haben wir Raum und Zeit irgendwie individualisiert, so entspricht einem ruhenden substantiellen Punkte als Weltlinie eine zur t -Achse parallele Gerade, einem gleichförmig bewegten substantiellen Punkte eine gegen die t -Achse geneigte Gerade, einem ungleichförmig bewegten substantiellen Punkte eine irgendwie gekrümmte Weltlinie. Fassen wir in einem beliebigen Weltpunkte x, y, z, t die dort durchlaufende Weltlinie auf und finden wir sie dort parallel mit irgendeinem Radiusvektor OA' der vorhin genannten hyperboloidischen Schale, so können wir OA' als neue Zeitachse einführen, und bei den damit gegebenen neuen Begriffen von Raum und Zeit erscheint die Substanz in dem betreffenden Weltpunkte als ruhend. Wir wollen nun dieses fundamentale Axiom einführen: Die in einem beliebigen Weltpunkte vorhandene Substanz kann stets bei geeigneter Festsetzung von Raum und Zeit als ruhend aufgefaßt werden. Das Axiom bedeutet, daß in jedem Weltpunkte stets der Ausdruck

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

positiv ausfällt oder, was damit gleichbedeutend ist, daß jede Geschwindigkeit v stets kleiner als c ausfällt. Es würde danach für alle sub-

stantiellen Geschwindigkeiten c als obere Grenze bestehen und hierin eben die tiefere Bedeutung der Größe c liegen. Dieses Axiom hat beim ersten Eindruck etwas Mißfälliges. Es ist aber zu bedenken, daß nun eine modifizierte Mechanik Platz greifen wird, in der die Quadratwurzel aus jener Differentialverbindung zweiten Grades eingeht, so daß Fälle mit Überlichtgeschwindigkeit nur mehr eine Rolle spielen werden, etwa wie in der Geometrie Figuren mit imaginären Koordinaten.

Der Anstoß und wahre Beweggrund für die Annahme der Gruppe G_c nun kam daher, daß die Differentialgleichung für die Fortpflanzung von Lichtwellen im leeren Raume jene Gruppe G_c besitzt. Andererseits hat der Begriff starrer Körper nur in einer Mechanik mit der Gruppe G_∞ einen Sinn. Hat man nun eine Optik mit G_c und gäbe es andererseits starre Körper, so ist leicht abzusehen, daß durch die zwei zu G_c und zu G_∞ gehörigen hyperboloidischen Schalen eine t -Richtung ausgezeichnet sein würde, und das würde weiter die Konsequenz haben, daß man an geeigneten starren optischen Instrumenten im Laboratorium einen Wechsel der Erscheinungen bei verschiedener Orientierung gegen die Fortschrittrichtung der Erde müßte wahrnehmen können. Alle auf dieses Ziel gerichteten Bemühungen, insbesondere ein berühmter Interferenzversuch von Michelson, hatten jedoch ein negatives Ergebnis. Um eine Erklärung hierfür zu gewinnen, bildete H. A. Lorentz eine Hypothese, deren Erfolg eben in der Invarianz der Optik für die Gruppe G_c liegt. Nach Lorentz soll jeder Körper, der eine Bewegung besitzt, in Richtung der Bewegung eine Verkürzung erfahren haben und zwar bei einer Geschwindigkeit v im Verhältnisse

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Diese Hypothese klingt äußerst phantastisch. Denn die Kontraktion ist nicht etwa als Folge von Widerständen im Äther zu denken, sondern rein als Geschenk von oben, als Begleitumstand des Umstandes der Bewegung.

Ich will nun an unserer Figur zeigen, daß die Lorentzsche Hypothese völlig äquivalent ist mit der neuen Auffassung von Raum und Zeit, wodurch sie viel verständlicher wird. Abstrahieren wir der Einfachheit wegen von y und z und denken uns eine räumlich eindimensionale Welt, so sind ein wie die t -Achse aufrechter und ein gegen die t -Achse geneigter Parallelstreifen (s. Fig. 1) Bilder für den Verlauf eines ruhenden, bezüglich eines gleich-

1) Eine wesentliche Anwendung dieser Tatsache findet sich bereits bei W. Voigt, Göttinger Nachr. 1887, S. 41.

förmig bewegten Körpers, der jedesmal eine konstante räumliche Ausdehnung behält. Ist OA parallel dem zweiten Streifen, so können wir t als Zeit und x als Raumkoordinate einführen, und es erscheint dann der zweite Körper als ruhend, der erste als gleichförmig bewegt. Wir nehmen nun an, daß der erste Körper als ruhend aufgefaßt die Länge l hat, d. h. der Querschnitt PP des ersten Streifens auf der x -Achse $= l \cdot OC$ ist, wo OC den Einheitsmaßstab auf der x -Achse bedeutet, und daß andererseits der zweite Körper als ruhend aufgefaßt die gleiche Länge l hat; letzteres heißt dann, daß der parallel der x -Achse gemessene Querschnitt des zweiten Streifens, $QQ = l \cdot OC$ ist. Wir haben nunmehr in diesen zwei Körpern Bilder von zwei gleichen Lorentzschsen Elektronen, einem ruhenden und einem gleichförmig bewegten. Halten wir aber an den ursprünglichen Koordinaten x, t fest, so ist als Ausdehnung des zweiten Elektrons der Querschnitt QQ seines zugehörigen Streifens parallel der x -Achse anzugeben. Nun ist offenbar, da $QQ = l \cdot OC$ ist, $QQ = l \cdot OD'$. Eine leichte Rechnung ergibt, wenn dx/dt für den zweiten Streifen $= v$ ist,

$$OD' = OC \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

also auch

$$PP:QQ = 1: \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Dies ist aber der Sinn der Lorentzschsen Hypothese von der Kontraktion der Elektronen bei Bewegung. Fassen wir andererseits das zweite Elektron als ruhend auf, adoptieren also das Bezugssystem x', t' , so ist als Länge des ersten der Querschnitt $P'P'$ seines Streifens parallel OC' zu bezeichnen und wir würden in dem nämlichen Verhältnisse das erste Elektron gegen das zweite verkürzt finden; denn es ist

$$P'P':QQ' = OD:OC' = OD':OC = QQ:PP.$$

Lorentz nannte die Verbindung t' von x und t Ortszeit des gleichförmig bewegten Elektrons und verwandte eine physikalische Konstruktion dieses Begriffs zum besseren Verständnis der Kontraktionshypothese. Jedoch scharf erkannt zu haben, daß die Zeit des einen Elektrons ebensogut wie die des anderen ist, d. h. daß t und t' gleich zu behandeln sind, ist erst das Verdienst von A. Einstein¹⁾. Damit war nun zunächst die Zeit als ein durch die Erscheinungen eindeutig festgelegter Begriff abgesetzt. An dem Begriffe des Raumes rüt-

telten weder Einstein noch Lorentz, vielleicht deshalb nicht, weil bei der genannten speziellen Transformation, wo die x, t -Ebene sich mit der x', t' -Ebene deckt, eine Deutung möglich ist, als sei die x -Achse des Raumes in ihrer Lage erhalten geblieben. Über den Begriff des Raumes in entsprechender Weise hinwegzuschreiten, ist auch wohl nur als Verwegenheit mathematischer Kultur einzutaxieren. Nach diesem zum wahren Verständnis der Gruppe G_c jedoch unerläßlichen weiteren Schritt aber scheint mir das Wort Relativitätspostulat für die Forderung einer Invarianz bei der Gruppe G_c sehr matt. Indem der Sinn des Postulats wird, daß durch die Erscheinungen nur die in Raum und Zeit vierdimensionale Welt gegeben ist, aber die Projektion in Raum und in Zeit noch mit einer gewissen Freiheit vorgenommen werden kann, möchte ich dieser Behauptung eher den Namen Postulat der absoluten Welt (oder kurz Weltpostulat) geben.

III.

Durch das Weltpostulat wird eine gleichartige Behandlung der vier Bestimmungsstücke x, y, z, t eines Weltpunktes möglich. Dadurch gewinnen, wie ich jetzt ausführen will, die Formen, unter denen die physikalischen Gesetze sich abspielen, an Verständlichkeit. Vor allem erlangt nunmehr der Begriff der Beschleunigung ein scharf hervortretendes Gepräge.

Ich werde mich einer geometrischen Ausdrucksweise bedienen, die sich sofort darbietet, indem man im Tripel x, y, z stillschweigend von z abstrahiert. Einen beliebigen Welt-punkt O sprechen wir als Raum-Zeit-Nullpunkt an. Der Kegel

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

mit O als Spitze (Fig. 2) besteht aus zwei Teilen, einem mit Werten $t < 0$, einem anderen

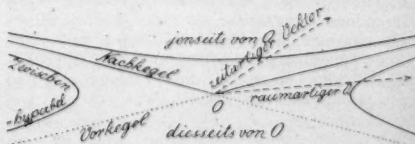


Fig. 2.

mit Werten $t > 0$. Der erste, der Vorkegel von O , besteht, sagen wir aus allen Weltpunkten, die „Licht nach O senden“, der zweite, der Nachkegel von O , aus allen Weltpunkten, die „Licht von O empfangen“. Das vom Vorkegel allein begrenzte Gebiet mag diesseits von O , das vom Nachkegel allein begrenzte jenseits

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 891, 1905; Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 4, 411, 1907.

von O heißen. Jenseits O fällt die schon betrachtete hyperboloidische Schale

$$F = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad t > 0.$$

Das Gebiet zwischen den Kegeln wird erfüllt von den einschaligen hyperboloidischen Gebilden

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = k^2$$

zu allen konstanten positiven Werten k^2 . Wichtig sind für uns die Hyperbeln mit O als Mittelpunkt, die auf diesen letzten Gebilden liegen. Die einzelnen Äste dieser Hyperbeln sollen kurz die Zwischenhyperbeln zum Zentrum O heißen. Ein solcher Hyperbelast würde, als Weltlinie eines substantiellen Punktes gedacht, eine Bewegung repräsentieren, die für $t = -\infty$ und $t = +\infty$ asymptotisch auf die Lichtgeschwindigkeit c ansteigt.

Nennen wir in Analogie zum Vektorbegriff im Raume jetzt eine gerichtete Strecke in der Mannigfaltigkeit der x, y, z, t einen Vektor, so haben wir zu unterscheiden zwischen den zeitartigen Vektoren mit Richtungen von O nach der Schale $+F=1, t > 0$ und den raumartigen Vektoren mit Richtungen von O nach $-F=1$. Die Zeitachse kann jedem Vektor der ersteren Art parallel laufen. Ein jeder Weltpunkt zwischen Vorkegel und Nachkegel von O kann stets durch das Bezugssystem als gleichzeitig mit O , aber ebensogut auch als früher oder später als O eingerichtet werden. Jeder Weltpunkt diesseits O ist notwendig stets früher, jeder Weltpunkt jenseits O notwendig stets später als O . Der Grenze $c = \infty$ entspricht ein vollständiges Zusammenklappen des keilförmigen Ausschnitts zwischen Vor- und Nachkegel in die Mannigfaltigkeit $t=0$. In den gezeichneten Figuren ist absichtlich dieser Ausschnitt mit verschiedenen Breiten angelegt.

Einen beliebigen Vektor, wie von O nach x, y, z, t , zerlegen wir in die Komponenten x, y, z, t . Sind die Richtungen zweier Vektoren beziehungsweise die eines Radiusvektors OR an eine der Flächen $+F=1$ und dazu einer Tangente RS im Punkte R der betreffenden Fläche, so sollen die Vektoren normal zueinander heißen. Danach ist

$$c^2 t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Vektoren mit den Komponenten x, y, z, t und x_1, y_1, z_1, t_1 normal zueinander sind.

Für die Beträge von Vektoren der verschiedenen Richtungen sollen die Einheitsmaßstäbe dadurch fixiert sein, daß einem raumartigen Vektor von O nach $-F=1$ stets der Betrag 1, einem zeitartigen Vektor von O nach $+F=1, t > 0$ stets der Betrag $1/c$ zugeschrieben wird.

Denken wir uns nun in einem Weltpunkte $P(x, y, z, t)$ die dort durchlaufende Weltlinie eines substantiellen Punktes, so entspricht danach dem zeitartigen Vektorelement dx, dy, dz, dt der Linie von P aus der Betrag

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}.$$

Das Integral $\int d\tau = \tau$ dieses Betrages auf der Weltlinie von irgendeinem fixierten Anfangspunkte P_0 bis zu dem variablen Endpunkte P geführt, nennen wir die Eigenzeit des substantiellen Punktes in P . Auf der Weltlinie betrachten wir x, y, z, t , d. h. die Komponenten des Vektors OP , als Funktionen der Eigenzeit τ , bezeichnen deren erste Differentialquotienten nach τ mit $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, deren zweite Differentialquotienten nach τ mit $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ und nennen die zugehörigen Vektoren, die Ableitung von OP nach τ den Bewegungsvektor in P , die Ableitung des letzteren nach τ den Beschleunigungsvektor in P . Dabei gilt

$$c^2 \ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2 - \ddot{z}^2 = c^2,$$

$$c^2 \ddot{t} \dot{t} - \ddot{x} \dot{x} - \ddot{y} \dot{y} - \ddot{z} \dot{z} = 0,$$

d. h. der Bewegungsvektor ist der zeitartige Vektor in Richtung der Weltlinie in P vom Betrage 1 und der Beschleunigungsvektor ist normal zum Bewegungsvektor, also gewiß ein raumartiger Vektor.

Nun gibt es einen eindeutig bestimmten Hyperbelast, der mit der Weltlinie in P drei unendlich benachbarte Punkte gemein hat und dessen Asymptoten Erzeugende bez. eines Vorkegels und eines Nachkegels sind. Dieser Hyperbelast heiße die Krümmungshyperbel in P (s. unten Fig. 3). Ist M das Zentrum dieser Hyperbel, so handelt es sich hier also um eine Zwischenhyperbel mit dem Zentrum M . Nun sei ϱ der Betrag des Vektors MP , so erkennen wir den Beschleunigungsvektor in P als den Vektor in Richtung MP vom Betrage $c^2 \varrho$.

Sind $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ sämtlich Null, so reduziert sich die Krümmungshyperbel auf die in P die Weltlinie berührende Gerade und es ist $\varrho = \infty$ zu setzen.

IV.

Um darzutun, daß die Annahme der Gruppe G_c für die physikalischen Gesetze nirgends zu einem Widersprüche führt, ist es unumgänglich, eine Revision der gesamten Physik auf Grund der Voraussetzung dieser Gruppe vorzunehmen. Diese Revision ist bereits in einem gewissen Umfange erfolgreich geleistet für Fragen der

Thermodynamik und Wärmestrahlung¹⁾, für die elektromagnetischen Vorgänge, endlich für die Mechanik unter Aufrechterhaltung des Massenbegriffes²⁾.

Für letzteres Gebiet ist vor allem die Frage aufzuwerfen: Wenn eine Kraft mit den Komponenten X, Y, Z nach den Raumachsen in einem Weltpunkte $P(x, y, z, t)$ angreift, wo der Bewegungsvektor x, y, z, t ist, als welche Kraft ist diese Kraft bei einer Änderung des Bezugssystems aufzufassen?

Nun existieren gewisse erprobte Ansätze betreffs der ponderomotorischen Kraft im elektromagnetischen Felde in denjenigen Fällen, wo die Gruppe G_c unzweifelhaft zuzulassen ist. Diese Ansätze führen zu der einfachen Regel: Bei Änderung des Bezugssystems ist die vorausgesetzte Kraft derart in dem neuen Raumkoordinat als Kraft zu beurteilen, daß dabei der zugehörige Vektor mit den Komponenten

$$iX, iY, iZ, iT,$$

wo

$$T = \frac{1}{c^2} \left(\frac{x}{t} X + \frac{y}{t} Y + \frac{z}{t} Z \right)$$

die durch c^2 dividierte Arbeitsleistung der Kraft im Weltpunkte ist, sich unverändert erhält. Dieser Vektor ist stets normal zum Bewegungsvektor in P . Ein solcher zu einer Kraft in P gehörender vierdimensionaler Vektor soll ein bewegendes Kraftvektor in P heißen.

Nun werde die durch P laufende Weltlinie von einem substantiellen Punkte mit konstanter mechanischer Masse m beschrieben. Das m -fache des Bewegungsvektors in P heiße Impulsvektor in P , das m -fache des Beschleunigungsvektors in P der Kraftvektor der Bewegung in P . Nach diesen Definitionen lautet das Gesetz dafür, wie die Bewegung eines Massenpunktes bei gegebenem bewegendem Kraftvektor statthat:

Der Kraftvektor der Bewegung ist gleich dem bewegendem Kraftvektor³⁾.

Diese Aussage faßt vier Gleichungen für die Komponenten nach den vier Achsen zusammen, wobei die vierte, weil von vornherein beide genannten Vektoren normal zum Bewegungsvektor sind, sich als eine Folge der drei ersten ansehen läßt. Nach der obigen Bedeutung von T stellt die vierte zweifellos den Energiesatz dar. Als kinetische Ener-

gie des Massenpunktes ist daher das c^2 -fache der Komponente des Impulsvektors nach der t -Achse zu definieren. Der Ausdruck hierfür ist

$$mc^2 d\tau/dt = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

d. i. nach Abzug der additiven Konstante mc^2 der Ausdruck $\frac{1}{2}mv^2$ der Newtonschen Mechanik bis

auf Größen von der Ordnung $1/c^2$. Sehr anschaulich erscheint hierbei die Abhängigkeit der Energie vom Bezugssysteme. Da nun aber die t -Achse in die Richtung jedes zeitartigen Vektors gelegt werden kann, so enthält andererseits der Energiesatz, für jedes mögliche Bezugssystem gebildet, bereits das ganze System der Bewegungsgleichungen. Diese Tatsache behält bei dem erörterten Grenzübergang zu $c = \infty$ ihre Bedeutung für den axiomatischen Aufbau der Newtonschen Mechanik und ist in solchem Sinne hier bereits von Herrn J. R. Schütz¹⁾ wahrgenommen worden.

Man kann von vornherein das Verhältnis von Längeneinheit und Zeiteinheit derart festlegen, daß die natürliche Geschwindigkeitsschranke $c = 1$ wird. Führt man dann noch $t \cdot \sqrt{-1} = s$ an Stelle von t ein, so erscheint der quadratische Differentialausdruck für $d\tau^2$ völlig symmetrisch in x, y, z, s und diese Symmetrie überträgt sich auf den mathematischen Ausdruck eines jeden Gesetzes, das dem Weltpostulat nicht widerspricht. Man kann danach das Wesen dieses Postulats mathematisch sehr prägnant in die mystische Formel kleiden: $3 \cdot 10^8 \text{ km} = \sqrt{-1} \text{ sec}$.

V.

Die durch das Weltpostulat geschaffenen Vorteile werden vielleicht durch nichts so schlagend belegt wie durch Angabe der von einer beliebig bewegten punktförmigen Ladung nach der Maxwell-Lorentz'schen Theorie ausgehenden Wirkungen. Denken wir uns die Weltlinie eines solchen punktförmigen Elektrons mit einer Ladung e und führen auf der Linie die Eigenzeit τ von irgendeinem Anfangspunkte ein. Um das vom Elektron in einem beliebigen Weltpunkte P_1 veranlaßte Feld zu haben, konstruieren wir den zu P_1 gehörigen Vorkegel. Dieser trifft die unbegrenzte Weltlinie des Elektrons, da deren Richtungen überall die von zeitartigen Vektoren sind, offenbar in einem einzigen Punkte P (Fig. 4). Wir legen in P die Tangente an die Weltlinie und konstruieren durch P_1 die

1) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme. Berl. Ber. 1907, S. 542 (auch Ann. d. Phys. 28, 1, 1908).

2) H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Gött. Nachr. 1908, S. 53.

3) H. Minkowski, a. a. O., S. 107. — Vgl. auch M. Planck, Verh. d. Physik. Ges. 4, 136, 1906.

1) J. R. Schütz, Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Gött. Nachr. 1897, S. 110.



Fig. 3.

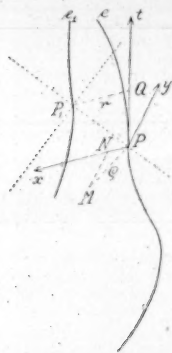


Fig. 4.

normale PQ auf diese Tangente. Der Betrag von PQ sei r . Als Betrag von PQ ist nach der Definition des Vorkegels dann r/c zu rechnen. Nun stellt der Vektor in Richtung PQ vom Betrage ec/r in seinen Komponenten nach den x , y , z -Achsen das mit c multiplizierte Vektorpotential, in der Komponente nach der t -Achse das skalare Potential des vom Elektron erzeugten Feldes im Weltpunkte P_1 vor. Hierin liegt das von A. Liénard¹⁾ und von E. Wiechert²⁾ aufgestellte Elementargesetz.

Bei der Beschreibung des vom Elektron hervorgerufenen Feldes selbst tritt sodann hervor, daß die Scheidung des Feldes in elektrische und magnetische Kraft eine relative ist mit Rücksicht auf die zugrunde gelegte Zeitachse. Am übersichtlichsten sind beide Kräfte zusammen zu beschreiben in einer gewissen, wenn auch nicht völligen Analogie zu einer Kraftschraube aus der Mechanik.

Ich will jetzt die von einer beliebig bewegten punktförmigen Ladung auf eine andere beliebig bewegte punktförmige Ladung ausgeübte ponderomotorische Wirkung angeben. Denken wir uns durch den Weltpunkt P_1 die Weltlinie eines zweiten punktförmigen Elektrons von der Ladung e_1 führend. Wir bestimmen P , Q , r wie vorhin, konstruieren sodann den Mittelpunkt M der Krümmungshyperbel in P , endlich die Normale MN von M aus auf eine durch P parallel zu QP_1 gedachte Gerade. Wir legen nun, mit P als Anfangspunkt, ein Bezugssystem folgendermaßen fest, die t -Achse in die Richtung PQ , die x -Achse in die Richtung QP_1 , die y -Achse in die Richtung MN , wodurch schließlich auch die Richtung der

z -Achse als normal zu den t , x , y -Achsen bestimmt ist. Der Beschleunigungsvektor in P sei $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$, der Bewegungsvektor in P_1 sei $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, $\dot{t}_1$. Jetzt lautet der von dem ersten beliebig bewegten Elektron auf das zweite beliebig bewegte Elektron im Weltpunkte P_1 ausgeübte bewegende Kraftvektor:

$$-ee_1 \left(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c} \right) \mathfrak{R},$$

wobei für die Komponenten $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$, $\mathfrak{R}_t$ des Vektors $\mathfrak{R}$ die drei Relationen bestehen

$$c\mathfrak{R}_t - \mathfrak{R}_x = \frac{1}{r^2}, \quad \mathfrak{R}_y = \frac{y}{c^2 r^2}, \quad \mathfrak{R}_z = 0$$

und viertens dieser Vektor $\mathfrak{R}$ normal zum Bewegungsvektor in P_1 ist und durch diesen Umstand allein in Abhängigkeit von dem letzteren Bewegungsvektor steht.

Vergleicht man mit dieser Aussage die bisherigen Formulierungen¹⁾ des nämlichen Elementargesetzes für die ponderomotorische Wirkung bewegter punktförmiger Ladungen aufeinander, so wird man nicht umhin können zuzugeben, daß die hier in Betracht kommenden Verhältnisse ihr inneres Wesen voller Einfachheit erst in vier Dimensionen enthüllen, auf einen von vornherein aufgezogenen dreidimensionalen Raum aber nur eine äußerst komplizierte Projektion werfen. —

In der dem Relativitätspostulate gemäß reformierten Mechanik fallen die Disharmonien, die zwischen der Newtonschen Mechanik und der neueren Elektrodynamik gestört haben, von selbst aus. Ich will noch die Stellung des Newtonschen Attraktionsgesetzes zu diesem Postulate berühren. Ich will annehmen, wenn zwei Massenpunkte m_1 , m_2 ihre Weltlinien beschreiben, werde von m_2 auf m_1 ein bewegender Kraftvektor ausgeübt genau von dem soeben im Falle von Elektronen angegebenen Ausdruck, nur daß statt $-ee_1$ dort jetzt $+mm_1$ stehen soll. Wir betrachten nun speziell den Fall, daß der Beschleunigungsvektor von m_2 konstant Null ist, wobei wir dann t so einführen mögen, daß m_2 als ruhend aufzufassen ist; die Bewegung von m_1 ferner erfolge allein mit jenem von m_2 herrührenden Kraftvektor. Modifizieren wir nun diesen angegebenen Vektor zunächst durch Division mit t_1 , welcher Faktor bis auf Größen von der Ordnung $1/c^2$ auf 1 hinauskommt, so zeigt sich²⁾, daß alsdann für die Orte x_1 , y_1 , z_1 von m_1 und ihren zeitlichen Verlauf genau wieder

1) A. Liénard, L'Éclairage électrique 10, 5, 53, 106, 1898.

2) E. Wiechert, Arch. néerl. (2) 5, 549, 1900.

1) K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903, S. 132; H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch., Art. V, 14, 199.

2) H. Minkowski, a. a. O., S. 110.

die Keplerschen Gesetze folgen würden, nur mit dem Unterschiede, daß darin an Stelle der Zeiten t_1 die Eigenzeiten τ_1 von m_1 eingehen würden. Auf Grund dieser einfachen Bemerkung ist dann alsbald einzusehen, daß das vorgeschlagene Anziehungsgesetz, verknüpft mit der neuen Mechanik, nicht weniger gut geeignet ist, die astronomischen Beobachtungen zu erklären, wie das Newtonsche Anziehungsgesetz verbunden mit der Newtonschen Mechanik.

Auch die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in ponderablen Körpern fügen sich durchaus dem Relativitätspostulate. Sogar die von Lorentz gelehrte Ableitung dieser Gleichungen auf Grund von Vorstellungen der Elektronentheorie braucht hierbei keines-

wegs aufgegeben zu werden, wie ich anderwärts zeigen werde.

Die ausnahmslose Gültigkeit des Relativitätspostulats ist, so möchte ich glauben, der wahre Kern eines elektromagnetischen Weltbildes, der von Lorentz getroffen, von Einstein weiter herausgeschält, nachgerade vollends am Tage liegt. Bei der Fortbildung der mathematischen Konsequenzen werden sich genug Hinweise auf experimentelle Verifikationen des Postulats einfinden, um auch diejenigen, denen eine Änderung altgewohnter Anschauungen unsympathisch oder schmerzlich ist, durch den Gedanken an eine prästabilisierte Harmonie zwischen der reinen Mathematik und der Physik auszu-söhnen.

(Eingegangen 23. Dezember 1908.)

BESPRECHUNGEN.

E. König, Kant und die Naturwissenschaft. (Die Wissenschaft. Heft 22.) 8. VI u. 232 S. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 1907. Gebunden M. 7.—

Die naturphilosophischen Studien der letzten Jahrzehnte kennzeichnet bekanntlich ein starkes Betonen des Empirismus und damit in Verbindung eine entschiedene Gegnerschaft zu dem Standpunkte Kants. Helmholtz und in neuerer Zeit Mach und Ostwald bilden den Mittelpunkt derselben. Das Eintreten von seiten der Vitalisten (wie z. B. Driesch) für den Apriorismus des Königsberger Denkers mußte den Riß eher erweitern, als ihn überbrücken.

Der Verfasser der vorliegenden Schrift sucht nun die Suprematie Kants auf dem Gebiete der Naturphilosophie und Erkenntnistheorie wiederum zu befestigen, und zwar, wie ihm zugestehen ist, mit großer Klarheit und erheblicher Schärfe der Beweisführung. — Die Anschauungen Kants stünden mit den Resultaten moderner Forschung keineswegs in Widerspruch, speziell seine „metaphysischen Anfangsgründe der Naturwissenschaften“ hätten überhaupt mit Metaphysik im landläufigen Sinne nichts zu tun. Kant sei eben nicht völlig richtig verstanden worden; so soll der Apriorismus nicht die Erfahrung ausschließen, sondern er sei als die „Bedingung der Möglichkeit aller Erfahrung“ aufzufassen. — Der Verfasser unterzieht daher das alte Raumproblem und die Einsprüche der modernen Empiristen gegen dasselbe einer erneuten kritischen Untersuchung. — Ebenso tritt er in eine Erörterung der Grundfrage nach dem „Zweckbegriff“ bei Kant und sucht damit dessen Stellung zu biologischen und psychophysischen Problemen zu fixieren. Indem König dabei die Ausführungen

Hartmanns widerlegt, welcher die Finalität den Kategorien zuzuweisen geneigt ist, kommt er zu dem Resultat, „daß in der allgemeinen Biologie das Prinzip einer Bestimmung nach Zwecken, die neben der kausalen einherginge oder ihr übergeordnet wäre, keine Existenzberechtigung habe“.

Das Buch scheint mehr als irgendein anderes der in den letzten Jahren zahlreich erschienenen Publikationen dazu geeignet, den Naturforscher und Mathematiker über den gegenwärtigen Standpunkt der Naturphilosophie und Erkenntnistheorie zu orientieren. Behrendsen.

A. Ladenburg, Naturwissenschaftliche Vorträge in gemeinverständlicher Darstellung. gr. 8. 264 S. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft. 1908. M. 9.—, gebund. M. 10.—.

Albert Ladenburg gibt in diesem Buche eine Reihe von Vorträgen, die er gelegentlich gehalten hat, in allgemein faßlicher Form heraus, um dem Laien einen Einblick in verschiedene Gebiete der Chemie zu verschaffen. Folgende Themen werden behandelt:

Die Fundamentalbegriffe der Chemie, die chemische Konstitution der Materie, Beziehungen zwischen den Atomgewichten und den Eigenschaften der Elemente, Stereochemie, die Aggregatzustände und ihr Zusammenhang, die 4 Elemente des Aristoteles, die Spektralanalyse und ihre kosmischen Konsequenzen, das Ozon, das Zeitalter der organischen Chemie und das Radium. Die Vorträge werden durch Zeichnungen und Tabellen anschaulich ergänzt. Der Laie und auch der Physiker, der sich nicht viel mit Chemie beschäftigt hat, wird hier auf an-