

Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere.

VON DR. ISSAI SCHUR,

Privatdozent an der Universität zu Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. FROBENIUS am 23. März 1905 [s. oben S. 359].)

Die vorliegende Arbeit enthält eine durchaus elementare Einführung in die von Hrn. FROBENIUS begründete Theorie der Gruppencharaktere¹, die auch als die Lehre von der Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare homogene Substitutionen bezeichnet werden kann.

Eine elementare Begründung dieser Theorie ist zwar in neuerer Zeit bereits von Hrn. BURNSIDE² gegeben worden. Hr. BURNSIDE macht jedoch noch von einem dem Gegenstand im Grunde fernliegenden Hilfsmittel, nämlich dem Begriff der HERMITESCHEN Formen, Gebrauch. Ich halte es daher nicht für überflüssig, eine neue Darstellung der FROBENIUSschen Theorie mitzuteilen, die mit noch einfacheren Hilfsmitteln operiert.

Zum Verständnis des Folgenden ist aus der Theorie der linearen Substitutionen im wesentlichen nur die Kenntnis der Anfangsgründe des Kalküls der Matrizen erforderlich. Abgesehen von den rein formalen Regeln dieses Kalküls werden nur noch zwei übrigens sehr leicht zu beweisende Sätze als bekannt vorausgesetzt, die der besseren Übersicht wegen hier angeführt werden mögen:

a) Ist P eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, und sind A und B zwei Matrizen der Grade m und n , deren Determinanten nicht verschwinden, so besitzen die beiden Matrizen P und APB denselben Rang.

b) Ist P eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, deren Rang gleich r ist, so lassen sich zwei Matrizen A und B der Grade m und n von nicht verschwindenden Determinanten bestimmen, so daß in der Matrix $APB = (q_{\alpha\beta})$ die r Koeffizienten $q_{11}, q_{22}, \dots, q_{rr}$ gleich 1, die übrigen Koeffizienten gleich 0 sind.

¹ Sitzungsberichte 1896, S. 985 und S. 1343, ferner 1897, S. 994 und 1899, S. 482.

² Acta Mathematica, Bd. 28 (1904), S. 369, und Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 1 (1904), S. 117.

Der zuletzt angeführte Satz ist identisch mit dem bekannten Theorem, welches besagt, daß eine bilineare Form $f = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n p_{\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta}$ vom Range r sich auf die Gestalt $f = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_r v_r$ bringen läßt, wo $u_1, u_2, \dots, u_r$ und $v_1, v_2, \dots, v_r$ linear unabhängige lineare homogene Funktionen der m Variablen x_{α} und der n Variablen y_{β} bedeuten.

Die eigentliche Theorie der Gruppencharaktere wird in den §§ 1—5 entwickelt.

Der § 6 enthält eine Anwendung auf die Theorie der charakteristischen Einheiten der endlichen Gruppen¹; die in diesem Paragraphen durchgeführte Untersuchung verdanke ich einer Anregung des Hrn. FROBENIUS.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe der Ordnung h , deren Elemente $H_0, H_1, \dots, H_{h-1}$ sind.

Sind dann

$$(1.) \quad (H_0), (H_1), \dots, (H_{h-1})$$

h Matrizen (lineare Substitutionen) n^{lin} Grades, welche den h^2 Relationen

$$(R)(S) = (RS) \quad (R, S = H_0, H_1, \dots, H_{h-1})$$

genügen, so bezeichnen wir das System der Matrizen (1.) als eine *Darstellung* der Gruppe $\mathfrak{G}$. Hierbei brauchen die Matrizen (1.) nicht voneinander verschieden zu sein.

Sind ferner

$$x_{H_0}, x_{H_1}, \dots, x_{H_{h-1}}$$

h unabhängige Variable, so soll die Matrix

$$X = \sum_R (R) x_R \quad (R = H_0, H_1, \dots, H_{h-1})$$

die der Darstellung entsprechende *Gruppenmatrix* genannt werden. Die Zahl n bezeichnen wir als den *Grad* der Darstellung oder der Gruppenmatrix.

Eine Gruppenmatrix $X = (x_{\alpha\beta})$ kann durch folgende Eigenschaften charakterisiert werden:

1. Die Koeffizienten $x_{\alpha\beta}$ sind lineare homogene Funktionen der Variablen $x_{H_0}, x_{H_1}, \dots, x_{H_{h-1}}$.

2. Ist $y_{H_0}, y_{H_1}, \dots, y_{H_{h-1}}$ ein zweites System von h unabhängigen Variablen, setzt man ferner

$$z_R = \sum_S x_S y_{S^{-1}R} \quad (R, S = H_0, H_1, \dots, H_{h-1}),$$

¹ FROBENIUS, Sitzungsberichte 1903, S. 328.

und geht X in Y oder Z über, falls in X die Variabeln x_R durch y_R oder z_R ersetzt werden, so soll die Gleichung $Z = XY$ bestehen.

Bedeutet E das Hauptelement der Gruppe, so ist offenbar

$$(E)X = X.$$

Daher ist die Determinante $|X|$ der Matrix X dann und nur dann identisch gleich 0, wenn die Determinante der Matrix (E) verschwindet. Ist ferner die Determinante $|X|$ nicht identisch gleich 0, so ist $(E) = E_n$ die Einheitsmatrix n^{ten} Grades. Da ferner für jedes Element R der Gruppe $R^h = E$, also auch $(R)^h = (E)$ ist, so sind, falls $|X| \neq 0$ ist, die Determinanten aller h Substitutionen (R) von Null verschieden.

Ist X eine Gruppenmatrix und A eine konstante Matrix¹, deren Determinante nicht verschwindet, so ist auch $X' = A^{-1}XA$ eine Gruppenmatrix. Jede auf diese Weise aus X hervorgehende Gruppenmatrix X' bezeichnen wir als eine der Gruppenmatrix X äquivalente Gruppenmatrix. Ebenso nennen wir die der Matrix X' entsprechende Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ der aus X hervorgehenden Darstellung äquivalent.

Eine Gruppenmatrix X soll *reduzibel* genannt werden, wenn sich eine ihr äquivalente Gruppenmatrix angeben läßt, welche die Form

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ U & X_2 \end{pmatrix}$$

besitzt. Hierbei bedeuten X_1 und X_2 zwei quadratische Matrizen gewisser Grade $r > 0$ und $s > 0$, während U eine Matrix mit s Zeilen und r Spalten ist. — Jede der Matrizen X_1 und X_2 besitzt dann ebenfalls die Eigenschaften einer Gruppenmatrix.

Eine nicht reduzible Gruppenmatrix nennen wir *irreduzibel*.²

In analoger Weise nennen wir eine Darstellung der Gruppe *reduzibel* oder *irreduzibel*, je nachdem die zugehörige Gruppenmatrix reduzibel oder irreduzibel ist.

Für die Äquivalenz der Gruppenmatrizen gelten folgende unmittelbar zu beweisende Regeln:

1. Ist X' der Gruppenmatrix X äquivalent, so ist auch X der Gruppenmatrix X' äquivalent.
2. Zwei Gruppenmatrizen, die einer dritten äquivalent sind, sind auch untereinander äquivalent.
3. Eine Gruppenmatrix X geht in eine ihr äquivalente Gruppenmatrix über, wenn die Zeilen und Spalten von X in derselben Weise permutiert werden. Daher ist z. B. die Gruppenmatrix $\begin{pmatrix} X_2 & U \\ 0 & X_1 \end{pmatrix}$ reduzibel.

¹ D. h. eine Matrix mit konstanten, von den x_R unabhängigen Koeffizienten.

² Strenggenommen, müßte auch die Funktion 0 der Variablen x_R als eine irreduzible Gruppenmatrix angesehen werden. Dieser triviale Fall soll aber, wenn im folgenden von einer irreduziblen Gruppenmatrix gesprochen wird, als ausgeschlossen gelten.

4. Sind zwei Gruppenmatrizen äquivalent, so sind ihre Determinanten, ihre Rangzahlen und ihre Spuren einander gleich. — Hierbei ist unter der *Spur* einer Matrix $(a_{\alpha\beta})$ die Größe $\sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha}$ zu verstehen.

5. Sind $X = (x_{\alpha\beta})$ und $X' = (x'_{\alpha\beta})$ zwei äquivalente Gruppenmatrizen, so ist die Anzahl der linear unabhängigen unter den Funktionen $x_{\alpha\beta}$ der h Variablen x_R gleich der analogen Anzahl für die Funktionen $x'_{\alpha\beta}$.

Die zuletzt genannte Regel geht daraus hervor, daß die $x_{\alpha\beta}$ als lineare homogene Funktionen der $x'_{\alpha\beta}$ und umgekehrt die $x'_{\alpha\beta}$ als lineare homogene Funktionen der $x_{\alpha\beta}$ darstellbar sind.

§ 2.

Es sollen zunächst einige Eigenschaften der irreduziblen Gruppenmatrizen abgeleitet werden.

Die Grundlage der Untersuchung bildet folgender Satz, der auch in der BURNSIDE'schen Darstellung der Theorie eine wichtige Rolle spielt:

1. *Es seien X und X' zwei irreduzible Gruppenmatrizen der Grade f und f' . Ist dann P eine konstante Matrix mit f Zeilen und f' Spalten, für die die Gleichung*

$$XP = PX'$$

besteht, so ist entweder $P = 0$ oder es sind X und X' äquivalent, und P ist eine quadratische Matrix des Grades $f = f'$ von nicht verschwindender Determinante.

Es sei nämlich P von Null verschieden und $r > 0$ der Rang von P . Es werde $f - r = s$, $f' - r = t$ gesetzt. Man bestimme dann (vgl. Einleitung) zwei Matrizen A und B der Grade f und f' , deren Determinanten nicht verschwinden, so daß die Matrix $APB = Q$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} E_r & N_{rt} \\ N_{sr} & N_{st} \end{pmatrix}$$

annimmt; hierbei soll allgemein E_n die Einheitsmatrix n^{ten} Grades bedeuten, während unter $N_{\kappa\lambda}$ die κ Zeilen und λ Spalten enthaltende Nullmatrix verstanden werden soll. Setzt man nun

$$AXA^{-1} = X_1, \quad B^{-1}X'B = X'_1,$$

so wird

$$(2.) \quad X_1 Q = Q X'_1.$$

Schreibt man nun X_1 und X'_1 in der Form

$$X_1 = \begin{pmatrix} X_r & X_t \\ X_{sr} & X_{st} \end{pmatrix}, \quad X'_1 = \begin{pmatrix} X'_r & X'_{rt} \\ X'_{sr} & X'_{st} \end{pmatrix},$$

wo $X_{\kappa\lambda}$ und $X'_{\kappa\lambda}$ Matrizen mit κ Zeilen und λ Spalten bedeuten, so folgt aus (2.)

$$\begin{pmatrix} X_{rr} & N_{rt} \\ X_{er} & N_{et} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_{rr} & X'_{rt} \\ N_{er} & N_{et} \end{pmatrix},$$

d. h. es ist

$$X_{er} = 0, \quad X'_{rt} = 0.$$

Wäre nun $r < f$ oder $r < f'$, so würde sich ergeben, daß X oder X' reduzibel ist. Daher muß, falls P nicht 0 sein soll, $r = f = f'$ sein. Dann wird aber P eine quadratische Matrix des Grades f von nicht verschwindender Determinante, und die Gruppenmatrizen X und X' sind wegen $P^{-1}XP = X'$ äquivalent.

Aus I folgt:

II. Ist X eine irreduzible Gruppenmatrix des Grades f , so muß jede mit X vertauschbare konstante Matrix P die Form aE_f besitzen.

In der Tat sei a eine Wurzel der Gleichung

$$|P - aE_f| = 0.$$

Dann wird $P - aE_f$ eine Matrix von verschwindender Determinante, für die die Gleichung

$$X(P - aE_f) = (P - aE_f)X$$

besteht. Daher muß nach Satz I die Matrix $P - aE_f$ gleich 0, also $P = aE_f$ sein.

Setzt man wie früher $X = \sum_R (R)x_R$, so ist wegen

$$(E)X = X(E) = X$$

die Matrix (E) mit X vertauschbar. Folglich ist (E) von der Form aE_f , wobei die Zahl a , da $(E)^2 = (E)$ ist, nur die Werte 0 oder 1 besitzen kann. Wäre nun $a = 0$, so würde sich $X = 0$ ergeben, ein Fall, den wir ausgeschlossen haben. Daher ist bei einer irreduziblen Gruppenmatrix stets $(E) = E_f$ und ihre Determinante nicht identisch 0.

Ist ferner $\mathfrak{G}$ insbesondere eine ABELSche Gruppe, so ist jede der Matrizen (R) mit X vertauschbar und also von der Form ρE_f . Hierbei muß die Größe ρ , da $(R)^h = E_f$ ist, eine h^{te} Einheitswurzel sein. Wäre nun $f > 1$, so würde sich ergeben, daß X reduzibel ist. Hieraus folgt:

III. Eine zu einer ABELSchen Gruppe gehörende Gruppenmatrix ist dann und nur dann irreduzibel, wenn ihr Grad gleich 1 ist.

Wir beweisen nun den wichtigen Satz:

IV. Es sei

$$X = (x_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, f),$$

eine irreduzible Gruppenmatrix des Grades f . Ist dann

$$x_{\alpha\beta} = \sum_R a_{\alpha\beta}^R x_R \quad (R = H_0, H_1, \dots, H_{h-1}),$$

so bestehen die Gleichungen

$$(I.) \quad \sum_R a_{\alpha\beta}^{R^{-1}} a_{\gamma\delta}^R = \frac{h}{f} c_{\alpha\delta} c_{\gamma\beta} \quad (\alpha, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, f)$$

wo $c_{\gamma\gamma}$ gleich 1 oder gleich 0 zu setzen ist, je nachdem ρ gleich σ oder von σ verschieden ist. Ist ferner

$$X' = (x'_{\kappa\lambda}) \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, f')$$

eine der Gruppenmatrix X nicht äquivalente irreduzible Gruppenmatrix des Grades f' und ist

$$x'_{\kappa\lambda} = \sum_R b_{\kappa\lambda}^R x_R \quad (R = H_0, H_1, \dots, H_{h-1}).$$

so gelten die $(ff')^2$ Relationen

$$(II.) \quad \sum_R a_{\alpha\beta}^{R^{-1}} b_{\kappa\lambda}^R = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, f; \quad \kappa, \lambda = 1, 2, \dots, f').$$

Es mögen nämlich die Matrizen $(a_{\alpha\beta}^R)$ und $(b_{\kappa\lambda}^R)$ mit A_R und B_R bezeichnet werden. Dann ist für je zwei Elemente R und S der Gruppe

$$A_R A_S = A_{RS}, \quad B_R B_S = B_{RS}.$$

Es sei nun $U = (u_{\alpha\beta})$ eine Matrix f^{ten} Grades, deren Koeffizienten $u_{\alpha\beta}$ beliebige Konstanten sind. Setzt man dann

$$(3.) \quad V = \sum_R A_{R^{-1}} U A_R,$$

so ist für jedes Element S der Gruppe

$$A_{S^{-1}} V A_S = \sum_R A_{S^{-1}R^{-1}} U A_{RS};$$

da nun das Element RS zugleich mit R alle Elemente der Gruppe durchläuft, ferner $S^{-1}R^{-1} = (RS)^{-1}$ ist, so ist die rechts stehende Summe gleich V . Folglich erhält man

$$A_{S^{-1}} V A_S = V$$

und, weil $A_{S^{-1}} A_S = A_E = E_f$ ist, $V A_S = A_S V$. Daher ist V mit allen A_S und also auch mit X vertauschbar und muß mithin die Form $v E_f$ besitzen. Die Größe v ist jedenfalls eine lineare homogene Funktion der $u_{\alpha\beta}$. Setzt man

$$v = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta},$$

¹ Die Relationen (I.) und (II.) sind in den bisherigen Darstellungen der Theorie nicht ausdrücklich angegeben. Sie sind aber implizite in den für die Gruppencharaktere geltenden Formeln enthalten.

so ergibt sich aus (3.)

$$\sum_R \sum_{\beta, \gamma} a_{\alpha\beta}^{R-1} u_{\beta\gamma} a_{\gamma\delta}^R = e_{\alpha\delta} \sum_{\beta, \gamma} c_{\beta\gamma} u_{\beta\gamma}.$$

Daher ist

$$(4.) \quad \sum_R a_{\alpha\beta}^{R-1} a_{\gamma\delta}^R = e_{\alpha\delta} c_{\beta\gamma}.$$

Setzt man speziell $\delta = \alpha$ und bildet die Summe über $\alpha = 1, 2, \dots, f$, so erhält man

$$f c_{\beta\gamma} = \sum_R \sum_{\alpha} a_{\gamma\alpha}^R a_{\alpha\beta}^{R-1}.$$

Die linke Seite wird aber, weil die Gleichung $A_R A_{R-1} = A_E = E_f$ mit den Relationen

$$\sum_{\alpha} a_{\gamma\alpha}^R a_{\alpha\beta}^{R-1} = a_{\gamma\beta}^E = e_{\gamma\beta}$$

identisch ist, gleich $h e_{\gamma\beta}$; daher ist $c_{\beta\gamma} = \frac{h}{f} e_{\gamma\beta}$. Setzt man dies in (4.) ein, so erhält man die Relationen (I.).

Bildet man ebenso, falls jetzt $U = (u_{\alpha\kappa})$ eine Matrix mit f Zeilen und f' Spalten bedeutet, deren Koeffizienten beliebige Größen sind, die Matrix

$$V = \sum_R A_{R-1} U B_R,$$

so ergibt sich auf demselben Wege die Gleichung $XV = VX'$. Da nun X und X' nicht äquivalent sein sollen, so muß $V = 0$ sein. Folglich ist

$$\sum_R \sum_{\beta, \kappa} a_{\alpha\beta}^{R-1} u_{\beta\kappa} b_{\kappa\lambda}^R = 0.$$

Hieraus folgen, da die $u_{\beta\kappa}$ beliebiger Werte fähig sind, die Relationen (II.).

Aus den eben bewiesenen Relationen ergibt sich leicht einer der Hauptsätze der Theorie:

V. Sind

$$X = (x_{\alpha\beta}) \quad , \quad X' = (x'_{\kappa\lambda}), \dots$$

beliebig viele zu der Gruppe Σ gehörende irreduzible Gruppenmatrizen der Grade $f, f', \dots$, von denen nicht zwei äquivalent sind, so sind die $f^2 + f'^2 + \dots$ linearen homogenen Funktionen der Variablen x_R untereinander linear unabhängig.

In der Tat möge eine Gleichung der Form

$$\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} + \sum_{\kappa, \lambda} c'_{\kappa\lambda} x'_{\kappa\lambda} + \dots = 0$$

bestehen. Dann ergibt sich, wenn $a_{\alpha\beta}^R$ und $b_{\kappa\lambda}^R$ dieselbe Bedeutung haben wie früher, für jedes R die Gleichung

$$\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^R + \sum_{\kappa, \lambda} c'_{\kappa\lambda} b_{\kappa\lambda}^R + \dots = 0.$$

Multipliziert man nun diese Gleichung mit a_{γ}^{k-1} und bildet die Summe über $R = H_0, H_1, \dots, H_{h-1}$, so erhält man wegen (I.) und (II.)

$$\frac{h}{f} \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} e_{\alpha\delta} e_{\gamma\beta} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber gleich $\frac{h}{f} c_{\delta\gamma}$. Folglich sind alle Koeffizienten $c_{\alpha\beta}$ gleich 0. Ebenso zeigt man, daß die f'^2 Koeffizienten $c'_{\alpha\lambda}$ verschwinden müssen, usw.

Es gilt ferner der Satz:

VI. *Die Determinante einer irreduziblen Gruppenmatrix ist eine irreduzible Funktion der h Variablen x_R . Ferner sind zwei irreduzible Gruppenmatrizen dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Determinanten einander gleich sind.*

Denn ist $X = (x_{\alpha\beta})$ eine irreduzible Gruppenmatrix des Grades f , so bilden die Koeffizienten $x_{\alpha\beta}$ nach Satz V ein System von f^2 linear unabhängigen Funktionen der Variablen x_R . Bedeuten nun die f^2 Größen $u_{\alpha\beta}$ beliebige Variable, so kann man die x_R als lineare homogene Funktionen der $u_{\alpha\beta}$ derart bestimmen, daß $x_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}$ wird. Wäre nun die Determinante $|x_{\alpha\beta}|$ eine zerlegbare Funktion der Variablen x_R , so würde sich ergeben, daß die Determinante $|u_{\alpha\beta}|$ als ein Produkt von zwei ganzen rationalen Funktionen der $u_{\alpha\beta}$ darstellbar ist, was bekanntlich nicht der Fall ist. — Sind ferner $X = (x_{\alpha\beta})$ und $X' = (x'_{\alpha\lambda})$ zwei nicht äquivalente irreduzible Gruppenmatrizen, so kann man die Variablen x_R so wählen, daß die Koeffizienten $x_{\alpha\beta}$ und $x'_{\alpha\lambda}$ beliebig vorgeschriebene Werte annehmen. Daher können die Determinanten von X und X' nicht einander gleich sein.

Die Relationen (I.) und (II.) lassen sich noch verallgemeinern.

Es seien S und T zwei feste Elemente der Gruppe. Ersetzt man in (I.) die Indizes α und γ durch ρ und σ , multipliziert dann die Gleichung mit $a_{\alpha\rho}^S a_{\gamma\sigma}^T$ und bildet die Summe über ρ und σ , so ergibt sich

$$(III.) \quad \sum_R a_{\alpha\beta}^{SR-1} a_{\gamma\delta}^{TR} = \frac{h}{f} a_{\alpha\delta}^S a_{\gamma\beta}^T.$$

Diese Formel kann noch anders geschrieben werden. Ersetzt man nämlich links R durch $T^{-1}R^{-1}$, so geht die Gleichung über in

$$(III'.) \quad \sum_R a_{\alpha\beta}^{SRT} a_{\gamma\delta}^{R-1} = \frac{h}{f} a_{\alpha\delta}^S a_{\gamma\beta}^T.$$

Speziell ergibt sich aus (III.) für $T = E$ die Relation

$$(IV.) \quad \sum_R a_{\alpha\beta}^{SR-1} a_{\gamma\delta}^R = \frac{h}{f} a_{\alpha\delta}^S e_{\gamma\beta}.$$

In analoger Weise erhält man aus der Gleichung (II.) die Formel

$$(V.) \quad \sum_R a_{\alpha\beta}^{SR-1} b_{\alpha\lambda}^{TR} = 0.$$

Auf eine andere Verallgemeinerung der Relationen (I.) hat mich Hr. FROBENIUS aufmerksam gemacht:

Es sei

$$X_1 = \sum_R (c_{\alpha\beta}^R) x_R$$

eine der Gruppenmatrix X äquivalente Gruppenmatrix, und es möge die Matrix $P = (p_{\alpha\beta})$ der Gleichung $X_1 = P^{-1}XP$ genügen. Setzt man $P^{-1} = (q_{\alpha\beta})$, so ist also

$$c_{\gamma\delta}^R = \sum_{\xi, \sigma} q_{\gamma\xi} a_{\xi\sigma}^R p_{\sigma\delta}.$$

Es ergibt sich dann

$$\sum_R a_{\alpha\beta}^{R-1} c_{\gamma\delta}^R = \sum_{\xi, \sigma} q_{\gamma\xi} p_{\sigma\delta} \sum_R a_{\alpha\beta}^{R-1} a_{\xi\sigma}^R = \frac{h}{f} \sum_{\xi, \sigma} q_{\gamma\xi} p_{\sigma\delta} e_{\alpha\sigma} e_{\xi\beta}.$$

Daher ist

$$\sum_R a_{\alpha\beta}^{R-1} c_{\gamma\delta}^R = \frac{h}{f} p_{\alpha\delta} q_{\gamma\beta}.$$

Diese Gleichung lehrt uns (was auch aus Satz II leicht hervorgeht), daß die Matrix P durch die Bedingung $X_1 = P^{-1}XP$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, und liefert eine explizite Methode zur Berechnung der Koeffizienten $p_{\alpha\beta}$.

Mit Hilfe dieser Formel (oder auch auf Grund des Satzes V) beweist man leicht:

1. Stimmen die hf Koeffizienten $c_{\alpha\alpha}^R$ mit den hf Koeffizienten $a_{\alpha\alpha}^R$ überein, so ist P eine Diagonalmatrix ($p_{\alpha} e_{\alpha\beta}$) und es ist

$$c_{\alpha\beta}^R = \frac{p_{\beta}}{p_{\alpha}} a_{\alpha\beta}^R.$$

2. Bestehen für ein festes γ die hf Gleichungen

$$c_{\gamma\delta}^R = a_{\gamma\delta}^R \quad (\delta = 1, 2, \dots, f, \quad R = H_0, H_1, \dots, H_{h-1}),$$

so sind alle Koeffizienten $c_{\alpha\beta}^R$ den Koeffizienten $a_{\alpha\beta}^R$ gleich.

§ 3.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der reduziblen Gruppenmatrizen. An erster Stelle beweisen wir den in dieser Form zuerst von Hrn. MASCHKE (Math. Ann. Bd. 52, S. 363) aufgestellten Satz:

VII. Ist die Gruppenmatrix X der Gruppenmatrix

$$X' = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ U & X_2 \end{pmatrix}$$

äquivalent, so ist sie auch der Gruppenmatrix

$$X'' = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$$

äquivalent.

Es braucht offenbar nur bewiesen zu werden, daß sich eine konstante Matrix P von nicht verschwindender Determinante bestimmen läßt, so daß

$$X'' = P^{-1} X' P$$

wird. Es seien nun r und s die Grade der Gruppenmatrizen X_1 und X_2 , und es werde, falls $X' = \sum_R (R) x_R$ ist,

$$(R) = \begin{pmatrix} A_R & 0 \\ C_R & D_R \end{pmatrix}$$

gesetzt, wo A_R und D_R quadratische Matrizen der Grade r und s , dagegen C_R eine rechteckige Matrix mit s Zeilen und r Spalten bedeutet. Es liegt nahe, die Substitution P in der Form

$$P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ F & E_s \end{pmatrix}$$

anzusetzen und zu fragen, ob sich die s Zeilen und r Spalten enthaltende Matrix F so bestimmen läßt, daß für jedes R

$$P^{-1} (R) P = \begin{pmatrix} A_R & 0 \\ 0 & D_R \end{pmatrix}$$

wird. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür erhält man leicht

$$(5.) \quad C_R + D_R F = F A_R.$$

Daß sich nun in der Tat eine Matrix F angeben läßt, die dieser Bedingung genügt, läßt sich folgendermaßen einsehen.

Da für je zwei Elemente R und S der Gruppe die Gleichung $(R)(S) = (RS)$ gilt, so bestehen die Relationen

$$(6.) \quad A_R A_S = A_{RS} \quad , \quad D_R D_S = D_{RS} ,$$

$$(7.) \quad C_R A_S + D_R C_S = C_{RS}.$$

Man multipliziere nun die Gleichung (7.) rechts mit $A_{S^{-1}}$ und bilde die Summe über $S = H_0, H_1, \dots, H_{h-1}$. Setzt man dann noch

$$\frac{1}{h} \sum_S C_S A_{S^{-1}} = F',$$

so ergibt sich wegen $A_S A_{S^{-1}} = A_E$

$$h C_R A_E + D_R \cdot h F' = \sum_S C_{RS} A_{S^{-1}}.$$

Ersetzt man nun in der rechts stehenden Summe S durch $R^{-1}S$, also S^{-1} durch $S^{-1}R$, so ergibt sich wegen (6.)

$$\begin{aligned}\sum_S C_{RS} A_{S^{-1}} &= \sum_S C_S A_{S^{-1}R} \\ &= \sum_S C_S A_{S^{-1}} A_R \\ &= h F' \cdot A_R.\end{aligned}$$

Daher ist

$$(8.) \quad C_R A_E + D_R F' = F' A_R.$$

Ist nun die Determinante von X_1 nicht 0, so ist $A_E = E$; daher genügt $F = F'$ der Gleichung (5.). In jedem Falle wird diese Gleichung durch die Matrix

$$F = F' - D_E C_E$$

befriedigt. Denn setzt man in (7.) $S = E$, so erhält man

$$(9.) \quad C_R A_E + D_R C_E = C_R,$$

und hieraus folgt durch Multiplikation mit A_S , daß $D_R C_E A_S = 0$ ist. Daher ist

$$F A_R = F' A_R - D_E C_E A_R = F' A_R.$$

Andererseits ist

$$C_R + D_R F = C_R - D_R C_E + D_R F'.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber wegen (8.) und (9.) gleich $C_R A_E + D_R F' = F' A_R$. Folglich ist in der Tat, wie zu beweisen ist, $C_R + D_R F = F A_R$.¹

¹ Hr. MASCHKE beweist den Satz nur für den allein wichtigen Fall, daß die Determinanten der Substitutionen (R) von 0 verschieden sind, und stützt sich hierbei auf den zuerst von den HH. A. LOEWY (Comptes Rendus 1896, S. 168) und E. H. MOORE (Math. Ann. Bd. 50, S. 213) bewiesenen Satz, daß sich für jede endliche Gruppe linearer Substitutionen von nicht verschwindenden Determinanten eine positive HERMITESCHE Form angeben läßt, deren Determinante nicht Null ist, und die bei allen Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt.

Auf den hier angegebenen elementaren Beweis bin ich durch die folgende Mittheilung des Hrn. FROBENIUS geführt worden, die eine Vereinfachung und Präzisierung des MASCHKESchen Beweises enthält:

Es sei $f = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta} \bar{x}_\alpha x_\beta$ eine positive HERMITESCHE Form von nicht verschwindender Determinante, die durch alle Substitutionen $Q = (R) = \begin{pmatrix} A_R & 0 \\ C_R & D_R \end{pmatrix}$ der Gruppe in sich transformiert wird. Ist dann $Q' = \begin{pmatrix} A'_R & C'_R \\ 0 & D'_R \end{pmatrix}$ die zu Q konjugierte und konjugiert komplexe Substitution, so besteht, falls H die Matrix ($h_{\alpha\beta}$) bedeutet, die Gleichung $Q' H Q = H$. Schreibt man nun entsprechend H in der Form $\begin{pmatrix} J & K \\ L & M \end{pmatrix}$, so erhält man die Gleichungen

$$D'_R L A_R + D'_R M C_R = L, \quad D'_R M D_R = M.$$

Nun ist — und dies ist der springende Punkt des Beweises — in einer positiven HERMITESCHEN Form von nicht verschwindender Determinante jede Hauptunterdeter-

Ehe ich in der Untersuchung weitergehe, will ich als eine einfache Folgerung des Satzes VII einen bekannten Satz über Matrizen ableiten.

Es sei J eine Matrix des Grades n , die der Gleichung $J^2 = J$ genügt. Ist nun r der Rang von J , so lassen sich zwei Substitutionen A und B von nicht verschwindenden Determinanten angeben, so daß $AJB = K$ die Form

$$K = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annimmt. Setzt man dann $B^{-1}JB = J'$, so wird $KJ' = K$. Hieraus folgt leicht, daß J' die Form

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

besitzt. Hierbei muß, da r auch der Rang von J' ist, $D = 0$ sein. Nun läßt sich aber J als eine Darstellung der allein aus dem Hauptelement E bestehenden endlichen Gruppe auffassen. Daher muß J nach Satz VII auch der Matrix

$$(10.) \quad J'' = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ähnlich sein.

Da ferner auch die Spuren von J und J'' übereinstimmen, die Spur von J'' aber gleich r ist, so ergibt sich zugleich, daß für jede Matrix, die der Gleichung $J^2 = J$ genügt, Spur und Rangzahl einander gleich sind.

Es sei nun $X = \sum_R (R)x_R$ eine zu der Gruppe $\mathfrak{S}$ gehörende Gruppenmatrix von verschwindender Determinante. Es werde $(E) = J$ gesetzt. Ist nun r der Rang von J , so läßt sich, wie wir gesehen haben, eine Matrix P bestimmen, so daß $J'' = P^{-1}JP$ die Form (10.) annimmt. Setzt man nun $P^{-1}XP = X''$, so ergibt sich aus der Gleichung $J''X''J'' = X''$, daß X'' die Form

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, wo X_1 eine Gruppenmatrix des Grades r ist, deren Determinante, weil X_1 für $x_E = 1, x_R = 0$ ($R \neq E$) gleich E_r wird, von Null verschieden ist. Hieraus folgt:

minante von Null verschieden, und mithin ist die Determinante von M nicht Null. Durch Elimination von D_R aus den obigen Gleichungen ergibt sich

$$C_R + M^{-1}LA_R = D_RM^{-1}L.$$

Daher genügt die Matrix $F = -M^{-1}L$ der Gleichung (5.) des Textes.

VIII. Ist X eine Gruppenmatrix vom Range r , so ist X einer Gruppenmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent, wo X_1 eine Gruppenmatrix des Grades r von nicht verschwindender Determinante ist.

Man zeigt auch leicht, daß, wenn X noch einer zweiten Gruppenmatrix $\begin{pmatrix} X'_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent ist, wo X'_1 ebenfalls von nicht verschwindender Determinante ist, X_1 und X'_1 äquivalent sein müssen.

Allgemeiner ergibt sich aus dem Satze VII leicht:

IX. Jede Gruppenmatrix X des Grades n und des Ranges r ist einer Gruppenmatrix äquivalent, welche die Form

$$(11.) \quad \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & X_m & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N_{n-r} \end{pmatrix}$$

hat, wobei $X_1, X_2, \dots, X_m$ irreduzible Gruppenmatrizen bedeuten, und N_{n-r} die Nullmatrix des Grades $n-r$ ist.

Ist insbesondere $\mathfrak{G}$ eine ABELSche Gruppe, so ist jede zu $\mathfrak{G}$ gehörende irreduzible Gruppenmatrix vom Grade 1. Aus IX folgt daher speziell, daß jede Darstellung einer ABELSchen Gruppe der Ordnung h durch lineare Substitutionen von nicht verschwindenden Determinanten einer Darstellung äquivalent ist, deren Substitutionen in der Hauptdiagonale h^{te} Einheitswurzeln, sonst überall Nullen enthalten. Für den weiteren speziellen Fall der zyklischen Gruppe ergibt sich hieraus der bekannte Satz, daß jede periodische Substitution A , d. h. jede Substitution des Grades n , für die eine Gleichung der Form $A^h = E_n$ besteht, einer anderen ähnlich ist, unter deren Koeffizienten die in der Hauptdiagonale stehenden h^{te} Einheitswurzeln, die übrigen aber gleich Null sind. Hieraus folgt auch, daß die Spur jeder periodischen Substitution als eine Summe von Einheitswurzeln darstellbar ist.

Ist wieder $\mathfrak{G}$ eine beliebige endliche Gruppe und $X = \sum_s (S) x_s$ eine zu $\mathfrak{G}$ gehörende Gruppenmatrix des Ranges r , so ergibt sich aus dem Satze VIII. leicht, daß, wenn s die Ordnung des Elementes S bedeutet, die Spur der Substitution (S) einer Summe von r Einheitswurzeln des Grades s gleich ist.

Ferner gilt der Satz:

X. Ist eine Gruppenmatrix X , deren Determinante nicht verschwindet, zwei Gruppenmatrizen

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & X_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X'_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & X'_{m'} \end{pmatrix}$$

äquivalent, wo die X_λ und X'_μ irreduzibel sind, so muß $m = m'$ sein und die Gruppenmatrizen $X_1, X_2, \dots, X_m$ müssen, abgesehen von der Reihenfolge, der Gruppenmatrizen $X'_1, X'_2, \dots, X'_{m'}$ äquivalent sein.¹

Es seien nämlich Φ , Φ_λ und Φ'_μ die Determinanten von X , X_λ und X'_μ . Dann sind nach Satz VI die Funktionen Φ_λ und Φ'_μ irreduzibel, ferner ist

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_m = \Phi'_1 \Phi'_2 \cdots \Phi'_{m'}.$$

Da nun bekanntlich eine Funktion Φ nur auf eine Weise in Primfaktoren zerlegbar ist, so muß $m = m'$ sein, ferner müssen die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$, abgesehen von konstanten Faktoren, in einer gewissen Reihenfolge mit den Funktionen $\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_{m'}$ übereinstimmen. Beachtet man jedoch, daß die Determinante einer Gruppenmatrix, sofern sie nicht verschwindet, für das Wertsystem $x_E = 1$, $x_R = 0$ ($R \neq E$) gleich 1 wird, so ergibt sich, daß die Funktionen Φ_λ , abgesehen von der Reihenfolge, den Funktionen Φ'_μ direkt gleich sein müssen. Nach Satz VI folgt hieraus aber, daß die Gruppenmatrizen X_λ , abgesehen von der Reihenfolge, den Gruppenmatrizen X'_μ äquivalent sind.

Betrachtet man nun zwei äquivalente irreduzible Gruppenmatrizen als nicht wesentlich voneinander verschieden, so folgt aus IX und X, daß jeder Gruppenmatrix X ein wohlbestimmtes System von irreduziblen Gruppenmatrizen $X_1, X_2, \dots, X_m$ entspricht, so daß, falls n den Grad und r den Rang von X bedeutet, X der Gruppenmatrix (II.) äquivalent ist. Die Gruppenmatrizen $X_1, X_2, \dots, X_m$ mögen nun als die *irreduziblen Bestandteile* von X bezeichnet werden.

Die irreduziblen Bestandteile einer Gruppenmatrix lassen sich ferner stets so wählen, daß je zwei äquivalente unter ihnen einander gleich werden. Kommt dann X_λ genau r_λ mal vor, so wollen wir r_λ den *Index* von X_λ nennen.² Es gehört daher zu jeder Gruppenmatrix X ein gewisses System von l irreduziblen Gruppenmatrizen, von denen nicht zwei äquivalent sind, und ein gewisses System von l Indizes $r_1, r_2, \dots, r_l$, die wir kurz die Indizes der Gruppenmatrix X nennen.

¹ Dieser Satz ist als spezieller Fall in einem allgemeinen von Hrn. A. LOEWY (Transactions of the Amer. Mathematical Society, Bd. 4, S. 44) bewiesenen Satze enthalten.

² Bedeuten Φ und Φ_λ die Determinanten von X und X_λ und ist Φ nicht gleich 0, so gibt r_λ den Exponenten der höchsten Potenz der irreduziblen Funktion Φ_λ an, die in Φ aufgeht.

Es gilt dann der Satz:

XI. *Es sei $X = (x_{\alpha\beta})$ eine Gruppenmatrix von nicht verschwindender Determinante, es seien $r_1, r_2, \dots, r_l$ die Indizes von X und $f_1, f_2, \dots, f_l$ die Grade der zugehörigen irreduziblen Gruppenmatrizen. Dann ist $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_l^2$ gleich der Anzahl g der linear unabhängigen unter den Funktionen $x_{\alpha\beta}$ der h Variablen x_R . Ferner ist $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_l^2$ gleich der Anzahl r der linear unabhängigen unter den mit X vertauschbaren konstanten Matrizen P . Endlich ist l gleich der Anzahl v' der linear unabhängigen unter den konstanten Matrizen, die mit X und zugleich mit allen eben charakterisierten Matrizen P vertauschbar sind.*

Es seien nämlich $X_1, X_2, \dots, X_m$ die irreduziblen Bestandteile von X , so daß X der Gruppenmatrix

$$X' = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & X_m \end{pmatrix}$$

äquivalent ist. Dann sind unter den Koeffizienten von X' nach Satz V genau $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_l^2$ linear unabhängig. Daher ist in der That $g = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_l^2$.

Um noch die beiden letzten Behauptungen unseres Satzes zu beweisen, nehmen wir, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen darf, an, die Matrizen $X_1, X_2, \dots, X_m$ seien so gewählt, daß die r_1 ersten, die r_2 folgenden usw. einander gleich werden. Es mögen dann die Grade von $X_1, X_2, \dots, X_m$ fortlaufend mit $s_1, s_2, \dots, s_m$ bezeichnet werden.

Die Zahlen v und v' bleiben offenbar ungeändert, wenn man X durch X' ersetzt. — Es sei nun P eine mit X' vertauschbare konstante Matrix. Wir können dann P in der Form

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mm} \end{pmatrix}$$

schreiben, wo $P_{\alpha\beta}$ eine Matrix mit s_α Zeilen und s_β Spalten bedeutet. Aus $X'P = PX'$ folgt dann

$$X_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} X_\beta.$$

Sind nun X_α und X_β nicht einander gleich, also auch nicht äquivalent, so ist $P_{\alpha\beta} = 0$; ist ferner $X_\alpha = X_\beta$, so muß $P_{\alpha\beta}$ die Form aF_α besitzen, wo $F_\alpha = E_{s_\alpha}$ die Einheitsmatrix des Grades $s_\alpha = s_\beta$ bedeutet. Daher hat P die Form

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}F_1 \cdots p_{1r_1}F_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ p_{r_11}F_1 \cdots p_{r_1r_1}F_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & q_{11}F_{r_1+1} \cdots q_{1r_2}F_{r_1+1} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & q_{r_21}F_{r_1+1} \cdots q_{r_2r_2}F_{r_1+1} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt ist jede Matrix P von dieser Form mit X vertauschbar. Daher ist v gleich der Anzahl der in P willkürlich bleibenden Koeffizienten $p_{\alpha\beta}$, $q_{\gamma\delta}$, $\cdots$, d. h. es ist in der Tat $v = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_l^2$.

Soll ferner die konstante Matrix Q mit X und zugleich auch mit allen P vertauschbar sein, so muß zunächst Q dieselbe Form haben wie P . Es möge etwa Q aus P dadurch hervorgehen, daß für $p_{\alpha\beta}$, $q_{\gamma\delta}$, $\cdots$ die Größen $p'_{\alpha\beta}$, $q'_{\gamma\delta}$, $\cdots$ gesetzt werden. Soll nun Q noch mit allen P vertauschbar sein, so muß, wie man leicht sieht, die Matrix $(p'_{\alpha\beta})$ mit allen Matrizen $(p_{\alpha\beta})$, ebenso $(q'_{\gamma\delta})$ mit allen Matrizen $(q_{\gamma\delta})$ vertauschbar sein, usw. Hieraus folgt aber, daß die Matrizen $(p'_{\alpha\beta})$, $(q'_{\gamma\delta})$, $\cdots$ sich von den Einheitsmatrizen der Grade $r_1, r_2, \cdots$ nur um konstante Faktoren unterscheiden. Diese Bedingung ist auch offenbar hinreichend dafür, daß Q mit X und zugleich mit allen P vertauschbar sei. Die Anzahl v der linear unabhängigen unter den Q ist aber gleich der Anzahl der in Q willkürlich bleibenden Koeffizienten. Da diese Anzahl gleich l ist, so ist, wie zu beweisen ist, $v' = l$.

§ 4.

Aus dem Satz V geht bereits leicht hervor, daß die Anzahl der zu der Gruppe $\mathfrak{H}$ gehörenden, einander nicht äquivalenten irreduziblen Gruppenmatrizen endlich und zwar höchstens gleich h ist.

Um nun die sämtlichen verschiedenen irreduziblen Gruppenmatrizen zu charakterisieren und ihre genaue Anzahl zu bestimmen, betrachten wir die spezielle Gruppenmatrix $H^{v,v}$ Grades von nicht verschwindender Determinante

$$X = (x_{PQ-1}),$$

deren Zeilen und Spalten man erhält, indem man für P und Q der Reihe nach die Elemente $H_0, H_1, \cdots, H_{h-1}$ der Gruppe setzt. Diese Gruppenmatrix entspricht der bekannten Darstellung von $\mathfrak{H}$ als Gruppe regulärer Permutationen und möge daher als die *reguläre* Gruppenmatrix bezeichnet werden.

Es seien nun unter den irreduziblen Bestandteilen von X im ganzen k einander nicht äquivalent, etwa die Gruppenmatrizen $X_0, X_1, \cdots, X_{k-1}$. Es sei ferner f_* der Grad von X_* und e_* der zugehörige Index,

so daß also, wenn die Determinanten von $X, X_0, \dots, X_{k-1}$ mit $\Theta, \Phi_0, \dots, \Phi_{k-1}$ bezeichnet werden,

$$\Theta = \Phi_0^{e_0} \Phi_1^{e_1} \dots \Phi_{k-1}^{e_{k-1}}$$

wird. Es gilt dann der Satz:

XII. Die Zahlen f_* und e_* sind einander gleich. Ferner ist die Zahl k gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente der Gruppe.

Der Beweis ergibt sich auf Grund des Satzes XI sehr einfach. Zunächst ist offenbar

$$(12.) \quad e_0 f_0 + e_1 f_1 + \dots + e_{k-1} f_{k-1} = h.$$

Da ferner unter den Koeffizienten der Matrix X genau h linear unabhängig sind, so ist

$$(13.) \quad f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_{k-1}^2 = h.$$

Wir betrachten nun die mit X vertauschbaren Matrizen

$$Y = (y_{P,Q}) \quad (P, Q = H_0, H_1, \dots, H_{k-1}),$$

deren Koeffizienten von der x_R unabhängig sind. Man zeigt leicht, daß Y dann und nur dann mit X vertauschbar ist, wenn

$$y_{P,Q} = y_{RP,RQ} \quad (P, Q, R = H_0, H_1, \dots, H_{k-1})$$

ist. Setzt man nun

$$y_{R,R} = y_R,$$

so wird $y_{P,Q} = y_{Q^{-1}P}$, also

$$Y = (y_{Q^{-1}P}).$$

Die Anzahl der in Y willkürlich bleibenden Koeffizienten, die uns die Anzahl der linear unabhängigen unter den Y angibt, ist nun gleich h . Folglich ist nach Satz XI

$$(14.) \quad e_0^2 + e_1^2 + \dots + e_{k-1}^2 = h.$$

Aus den Gleichungen (12.), (13.) und (14.) folgt aber

$$(e_0 - f_0)^2 + (e_1 - f_1)^2 + \dots + (e_{k-1} - f_{k-1})^2 = 0,$$

folglich ist in der Tat $e_* = f_*$.

Um nun die Anzahl k genauer zu bestimmen, haben wir noch die konstanten Matrizen

$$Z = (z_{P,Q})$$

zu betrachten, die mit X und zugleich mit allen Y vertauschbar sind. Es ergibt sich, daß

$$z_{P,Q} = z_{RP,RQ} = z_{PR,QR} \quad (P, Q, R = H_0, H_1, \dots, H_{k-1})$$

sein muß. Setzt man $z_{R,E} = z_R$, so wird

$$z_{P,Q} = z_{Q^{-1}P} = z_{PQ^{-1}}.$$

Ersetzt man P durch PQ , so erhält man

$$(15.) \quad z_P = z_{Q^{-1}PQ}.$$

Umgekehrt ist jede Matrix $Z = (z_{Q^{-1}P})$, deren Koeffizienten $z_{H_0}, z_{H_1}, \dots, z_{H_{k-1}}$ den Bedingungen (15.) genügen, mit X und auch mit Y vertauschbar. Hierbei wird also z_P dann und nur dann gleich z_R , wenn R auf die Form $Q^{-1}PQ$ gebracht werden kann, d. h. wenn P und R konjugierte Elemente sind. Daher ist die Anzahl der in Z willkürlichen bleibenden Koeffizienten, die nach Satz XI mit k übereinstimmen muß, gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente, in die die Elemente der Gruppe zerfallen.

Aus der Gleichung (13.) ergibt sich leicht der wichtige Satz:

XIII. Die Anzahl der zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörenden, einander nicht äquivalenten irreduziblen Gruppenmatrizen (Darstellungen) ist genau gleich der Anzahl k der Klassen konjugierter Elemente der Gruppe.

Zunächst folgt aus dem Vorhergehenden, daß mindestens k nicht äquivalente irreduzible Gruppenmatrizen existieren, nämlich die k irreduziblen Bestandteile $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$ der regulären Gruppenmatrix. Es muß aber jede andere irreduzible Gruppenmatrix X' einer dieser k Gruppenmatrizen äquivalent sein. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßten, falls f' den Grad von X' bedeutet, die

$$f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_{k-1}^2 + f'^2 = h + f'^2$$

Koeffizienten der $k+1$ irreduziblen Gruppenmatrizen $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}, X'$ untereinander linear unabhängig sein. Dies ist jedoch nicht möglich, da nicht mehr als h linear unabhängige lineare homogene Funktionen der h Variablen x_R existieren können.

§ 5.

Bilden die Substitutionen $(H_0), (H_1), \dots, (H_{k-1})$ eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$, und ist $\chi(R)$ die Spur der Substitution (R) , so nennt man das System der h Zahlen $\chi(R)$ den der Darstellung oder der zugehörigen Gruppenmatrix X entsprechenden Charakter. Insbesondere bezeichnet man jeden einer irreduziblen Darstellung entsprechenden Charakter als einen einfachen Charakter der Gruppe.

Da nun zwei äquivalenten Darstellungen derselbe Charakter entspricht, so ist die Anzahl der einfachen Charaktere der Gruppe gleich

der Anzahl k der nicht äquivalenten irreduziblen Gruppenmatrizen $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$. Die zugehörigen Charaktere sollen mit

$$\chi^{(0)}(R), \chi^{(1)}(R), \dots, \chi^{(k-1)}(R)$$

bezeichnet werden.

Die Zahl $\chi(R) = r$ gibt den Rang der Matrix (R) und also auch den Rang der Gruppenmatrix X an. Diese Zahl soll der *Grad* des Charakters $\chi(R)$ genannt werden. Insbesondere ist der Grad

$$\chi^{(\epsilon)}(R) = f_{\epsilon}$$

des einfachen Charakters $\chi^{(\epsilon)}(R)$ gleich dem Grade der zugehörigen Gruppenmatrix X_{ϵ} .

Allgemeiner ist $\chi(R)$ eine Summe von r Einheitswurzeln. Ist

$$\chi(R) = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{r-1},$$

so ist

$$\chi(R^{-1}) = \rho_1^{-1} + \rho_2^{-1} + \dots + \rho_{r-1}^{-1};$$

daher sind $\chi(R)$ und $\chi(R^{-1})$ konjugiert komplexe Größen. Ersetzt man ferner in den Matrizen (R) jeden Koeffizienten durch den konjugiert komplexen Wert, so bilden auch die so entstehenden Matrizen eine Darstellung der Gruppe. Ist daher $\chi(R)$ ein Charakter, so bilden auch die Zahlen $\chi'(R) = \chi(R^{-1})$ einen solchen. Die Charaktere $\chi(R)$ und $\chi'(R)$ werden *inverse* Charaktere genannt. Man schließt auch leicht, daß, wenn $\chi^{(\epsilon)}(R)$ ein einfacher Charakter ist, der inverse Charakter $\chi^{(\epsilon)}(R^{-1}) = \chi^{(\epsilon')}(R)$ ebenfalls ein einfacher Charakter ist.

Da ferner für je zwei Matrizen (R) und (S) die beiden Produkte $(R)(S)$ und $(S)(R)$ dieselben Spuren besitzen, so ist für je zwei Elemente R und S der Gruppe

$$(VI.) \quad \chi(RS) = \chi(SR).$$

Ersetzt man hierin R durch $S^{-1}R$, so ergibt sich

$$(VI'). \quad \chi(R) = \chi(S^{-1}RS).$$

Gehören daher zwei Elemente P und R derselben Klasse konjugierter Elemente an, so ist stets $\chi(P) = \chi(R)$.

Ist unter den irreduziblen Bestandteilen der Matrix X die irreduzible Gruppenmatrix X_{ϵ} genau $r_{\epsilon} \geq 0$ mal enthalten, so ist offenbar

$$(16.) \quad \chi(R) = r_0 \chi^{(0)}(R) + r_1 \chi^{(1)}(R) + \dots + r_{k-1} \chi^{(k-1)}(R).$$

Bedeutet X speziell die reguläre Gruppenmatrix, so wird, da die Spur von $X = (x_{PQ-1})$ gleich $h x_E$ ist,

$$\chi(R) = h \epsilon_R,$$

wo ε_R gleich 1 oder gleich 0 zu setzen ist, je nachdem R gleich E oder von E verschieden ist. Da ferner für $X = (x_{PQ-1})$ die Zahl r_κ gleich f_κ ist, so folgt aus (16.)

$$(VII.) \quad \sum_{\vartheta=0}^{k-1} f_{\vartheta} \chi^{(\vartheta)}(R) = h \varepsilon_R.$$

Es seien ferner ρ und σ zwei verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, \dots, k-1$. Setzt man

$$X_{\rho} = \sum_R (a_{\alpha\beta}^R) x_R, \quad X_{\sigma} = \sum_R (b_{\kappa\lambda}^R) x_R, \quad \left(\begin{matrix} \alpha, \beta = 1, 2, \dots, f_{\vartheta} \\ \kappa, \lambda = 1, 2, \dots, f_{\sigma} \end{matrix} \right)$$

so wird

$$\chi^{(\vartheta)}(R) = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha}^R, \quad \chi^{(\sigma)}(R) = \sum_{\kappa} b_{\kappa\kappa}^R.$$

Aus der Gleichung (vgl. Formel (IV.))

$$\sum_R a_{\alpha\alpha}^{SR-1} a_{\beta\beta}^R = \frac{h}{f_{\vartheta}} a_{\alpha\beta}^S e_{\beta\alpha}$$

ergibt sich dann, indem man die Summe über α und β bildet,

$$(VIII.) \quad \sum_R \chi^{(\vartheta)}(SR^{-1}) \chi^{(\vartheta)}(R) = \frac{h}{f_{\vartheta}} \chi^{(\vartheta)}(S).$$

Speziell erhält man für $S = E$ die Formel

$$(IX.) \quad \sum_R \chi^{(\vartheta)}(R^{-1}) \chi^{(\vartheta)}(R) = h.$$

Aus der Gleichung (vgl. Formel (III.))

$$\sum_R a_{\alpha\beta}^{SK-1} a_{\beta\alpha}^{TR} = \frac{h}{f_{\vartheta}} a_{\alpha\alpha}^S a_{\beta\beta}^T$$

ergibt sich ferner, indem man über α und β summiert und beachtet, daß $\sum_{\beta} a_{\alpha\beta}^P a_{\beta\alpha}^Q = a_{\alpha\alpha}^{PQ}$ ist,

$$(X.) \quad \chi^{(\vartheta)}(S) \chi^{(\vartheta)}(T) = \frac{f_{\vartheta}}{h} \sum_R \chi^{(\vartheta)}(SR^{-1}TR).$$

In analoger Weise erhält man aus der Formel (V.) die Gleichung

$$(XI.) \quad \sum_R \chi^{(\vartheta)}(SR^{-1}) \chi^{(\sigma)}(R) = 0 \quad (\vartheta \neq \sigma);$$

hieraus ergibt sich speziell für $S = E$

$$(XII.) \quad \sum_R \chi^{(\vartheta)}(R^{-1}) \chi^{(\sigma)}(R) = 0.$$

Bildet man in der Gleichung (X.) die Summe über $\rho = 0, 1, \dots, k-1$, so folgt auf Grund der Formel (VII.)

$$\sum_{\vartheta} \chi^{(\vartheta)}(S) \chi^{(\vartheta)}(T) = \sum_R \varepsilon_{SR^{-1}TR}.$$

Sind nun S und T^{-1} zwei nicht konjugierte Elemente der Gruppe, so wird die Gleichung $SR^{-1}TR = E$ durch kein Element R befriedigt, daher ist in diesem Fall

$$(XIII.) \quad \sum_i \chi^{(i)}(S) \chi^{(i)}(T) = 0.$$

Gehören dagegen S und T^{-1} einer Klasse konjugierter Elemente an, die aus h_s Elementen besteht, so besitzt die Gleichung $SR^{-1}TR = E$ genau $\frac{h}{h_s}$ Lösungen R . Ferner wird dann $\chi^{(i)}(T) = \chi^{(i)}(S^{-1})$; daher besteht die Gleichung

$$(XIV.) \quad \sum_i \chi^{(i)}(S) \chi^{(i)}(S^{-1}) = \frac{h}{h_s}.$$

Die Relationen (VI.) bis (XIV.) bilden die Grundlage der Theorie der Gruppencharaktere. Die wichtigsten unter ihnen sind die Formeln (VI.), (VII.), (IX.), (X.) und (XII.). Die übrigen lassen sich aus diesen durch eine einfache Rechnung ableiten.

Es sei nun X eine beliebige Gruppenmatrix, für die die Zahlen $\chi_i(R)$ und r_i dieselbe Bedeutung haben wie früher. Multipliziert man dann die Gleichung (16.) mit $\chi^{(i)}(R^{-1})$ und bildet die Summe über $R = H_0, H_1, \dots, H_{h-1}$, so ergibt sich auf Grund der Relationen (IX.) und (XII.)

$$hr_i = \sum_R \chi(R) \chi^{(i)}(R^{-1}).$$

Daher sind die Zahlen r_i und folglich auch die irreduziblen Bestandteile der Gruppenmatrix X allein durch den Charakter $\chi(R)$ bestimmt.

Hieraus ergibt sich der fundamentale Satz:

XIV. *Zwei Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{S}$ durch lineare Substitutionen von nicht verschwindenden Determinanten sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihnen derselbe Charakter entspricht. Allgemeiner sind zwei Darstellungen dann und nur dann äquivalent, wenn sie denselben Grad und denselben Charakter besitzen.*

Ferner besteht der Satz:

XV. *Der Grad jeder irreduziblen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}$ ist ein Divisor der Ordnung der Gruppe.*

Dies folgt aus der Gleichung (VIII.), die man auch in der Form

$$\sum_R \chi^{(i)}(R) \left\{ \frac{h}{f_i} \varepsilon_{SR^{-1}} - \chi^{(i)}(SR^{-1}) \right\} = 0$$

schreiben kann. Da nämlich die h Zahlen $\chi^{(i)}(R)$ nicht sämtlich gleich 0 sind¹, so muß die Determinante h^{ten} Grades

¹ Die Zahl $\chi^{(i)}(E) = f_i$ ist jedenfalls nicht Null.

$$\left| \frac{h}{f_{\varepsilon}} \varepsilon_{PQ^{-1}} - \chi^{(\varepsilon)}(PQ^{-1}) \right| \quad (P, Q = H_0, H_1, \dots, H_{h-1})$$

verschwinden. Beachtet man noch, daß die Größen $\chi_i^{(\varepsilon)}(R)$ ganze algebraische Zahlen sind, so ergibt sich, daß die Zahl $\frac{h}{f_{\varepsilon}}$ einer Gleichung der Form

$$x^h + c_1 x^{h-1} + \dots + c_h = 0$$

mit ganzen algebraischen Koeffizienten genügt. Folglich ist die Zahl $\frac{h}{f_{\varepsilon}}$ eine ganze algebraische und also, da sie rational ist, eine ganze rationale Zahl.

§ 6.

Als eine *charakteristische Einheit* der Gruppe $\mathfrak{H}$ bezeichnet man ein System von h Größen

$$a_{H_0}, a_{H_1}, \dots, a_{H_{h-1}},$$

für die die h Relationen

$$\sum_R a_{SR^{-1}} a_R = a_S \quad (R, S = H_0, H_1, \dots, H_{h-1})$$

bestehen. Ebenso nennt man dann auch die Matrix $h^{\text{ten}} \text{ Grades } A = (a_{PQ^{-1}})$ eine Einheit. Damit die Zahlen a_R eine Einheit bilden, ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichung $A^2 = A$ erfüllt sei.

Ist ferner $X = (x_{PQ^{-1}})$, so nennt man die Matrix $\bar{X} = (x_{Q^{-1}P})$ die zu X *antistrophe* Matrix. Setzt man $Y = (y_{PQ^{-1}})$ und $\bar{Y} = (y_{Q^{-1}P})$, so sind X und $\bar{Y}$ vertauschbar, ferner ist, falls $XY = Z$ wird, die zu Z antistrophe Matrix $\bar{Z}$ gleich $\bar{Y}\bar{X}$.

Ist nun $A = (a_{PQ^{-1}})$ eine Einheit, $\bar{A}$ die antistrophe Matrix, so ist auch $\bar{A}^2 = \bar{A}$, ferner besitzt die Matrix $X' = \bar{A}X$ die Eigenschaften einer Gruppenmatrix. Ihre Spur ist gleich

$$\sum_{R,S} a_{S^{-1}R^{-1}S} x_R.$$

Daher bilden die Zahlen

$$\varphi(R) = \sum_S a_{S^{-1}RS}$$

einen Charakter des Grades ha_E , den man als den *durch die Einheit a_R bestimmten Charakter* bezeichnet. Ist $\varphi(R)$ ein einfacher Charakter, so heißt die Einheit eine *primitive*.

Kennt man eine den einfachen Charakter $\chi(R)$ bestimmende Einheit $A = (a_{PQ^{-1}})$, so kann man auch eine dem Charakter $\chi(R)$ entsprechende irreduzible Gruppenmatrix X_1 konstruieren. Hierzu hat

man, wenn b_p die zu a_p konjugiert komplexe GröÙe bedeutet und $\bar{B} = (b_{q^{-1}p})$ ist, eine Matrix h^{ten} Grades L zu bestimmen, so daÙ

$$L^{-1} \bar{B} L = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (f = h a_E = h b_E)$$

wird. Dann hat $L^{-1} \bar{B} X L = (L^{-1} \bar{B} L) (L^{-1} X L) = (L^{-1} X L) (L^{-1} \bar{B} L)$ die Form

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wo die Gruppenmatrix X_1 die verlangte Eigenschaft besitzt.

Es soll hier umgekehrt gezeigt werden, wie man die sämtlichen den einfachen Charakter $\chi(R)$ bestimmenden primitiven Einheiten zu berechnen hat, falls es auf irgendeinem Wege gelungen ist, eine dem Charakter $\chi(R)$ entsprechende Darstellung der Gruppe zu bestimmen.

Es seien

$$X_1 = (x_{\alpha\beta}) \quad , \quad X'_1 = (x'_{\kappa\lambda})$$

zwei nicht äquivalente irreduzible Gruppenmatrizen der Grade f und f' , ferner $\chi(R)$ und $\chi'(R)$ die ihnen entsprechenden Charaktere. Ist dann

$$x_{\alpha\beta} = \sum_R a_{\alpha\beta}^R x_R \quad , \quad x'_{\kappa\lambda} = \sum_R b_{\kappa\lambda}^R x_R,$$

so mögen die Matrizen h^{ten} Grades

$$\left(\frac{f}{h} a_{\alpha\beta}^{PQ^{-1}} \right) \quad , \quad \left(\frac{f'}{h} b_{\kappa\lambda}^{PQ^{-1}} \right)$$

mit $A_{\alpha\beta}$ und $B_{\kappa\lambda}$, ferner die Matrizen

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha\alpha} = \left\{ \frac{f}{h} \chi(PQ^{-1}) \right\} \quad , \quad \sum_{\kappa} B_{\kappa\kappa} = \left\{ \frac{f'}{h} \chi'(PQ^{-1}) \right\}$$

mit J und J' bezeichnet werden.

Die früher erhaltenen Relationen (III.), (IV.) und (V.) lassen sich dann in den Formeln

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta} &= e_{\gamma\beta} A_{\alpha\delta}, \\ (17.) \quad A_{\alpha\beta} \bar{A}_{\gamma\delta} &= \left(\frac{h}{f} a_{\alpha\delta}^p a_{\gamma\beta}^{q-1} \right), \\ A_{\alpha\beta} B_{\kappa\lambda} &= A_{\alpha\beta} \bar{B}_{\kappa\lambda} = 0 \end{aligned}$$

zusammenfassen; hierbei bedeuten $\bar{A}_{\alpha\beta}$ und $\bar{B}_{\kappa\lambda}$ die zu $A_{\alpha\beta}$ und $B_{\kappa\lambda}$ antistrophischen Matrizen. Ebenso sind die Relationen (VIII.) und (XI.) identisch mit den Gleichungen

$$J^2 = J \quad , \quad J J' = 0.$$

Die f^2 Matrizen $A_{\alpha\beta}$ sind untereinander linear unabhängig; denn aus

$$\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = 0$$

folgt wegen (17.), indem man links mit $A_{\gamma\gamma}$, rechts mit $A_{\beta\beta}$ multipliziert, $c_{\gamma\beta}A_{\gamma\beta} = 0$, also $c_{\gamma\beta} = 0$.

Es werde nun

$$\varphi_{\alpha\beta}(R) = \frac{f}{h} \sum_S a_{\alpha\beta}^{S^{-1}RS}$$

gesetzt. Dann ist

$$\varphi_{\alpha\beta}(R) = e_{\alpha\beta} \chi(R).$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} \sum_S a_{\alpha\beta}^{S^{-1}RS} &= \sum_S \sum_{\tau, \tau'} a_{\alpha\beta}^{S^{-1}} a_{\tau\tau'}^R a_{\tau\tau'}^S \\ &= \sum_{\tau, \tau'} a_{\alpha\tau}^R \sum_S a_{\tau\tau'}^{S^{-1}} a_{\tau\tau'}^S \\ &= \frac{h}{f} \sum_{\tau, \tau'} a_{\alpha\tau}^R e_{\alpha\beta} e_{\tau\tau'} \\ &= \frac{h}{f} e_{\alpha\beta} \sum_{\tau} a_{\tau\tau}^R. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist aber, wie zu beweisen ist, gleich $\frac{h}{f} e_{\alpha\beta} \chi(R)$.

Die Gleichung $A_{\alpha\alpha}^2 = A_{\alpha\alpha}$ lehrt uns insbesondere, daß die h Größen $\frac{f}{h} a_{\alpha\alpha}^R$ eine Einheit bilden. Da der durch sie bestimmte Charakter gleich $\varphi_{\alpha\alpha}(R) = \chi(R)$ ist, so ergibt sich:

XVI. Bilden die h Substitutionen f^{ten} Grades ($a_{\alpha\beta}^R$) eine irreduzible Darstellung der Gruppe, die dem Charakter $\chi(R)$ entspricht, so repräsentieren für jedes α die h Größen $\frac{f}{h} a_{\alpha\alpha}^R$ eine den Charakter $\chi(R)$ bestimmende charakteristische Einheit.

Ferner gilt der Satz:

XVII. Ist $A = (a_{pq-1})$ eine den Charakter $\chi(R)$ bestimmende (primitive) Einheit, so lassen sich (auf eine und nur eine Weise) f^2 Größen $l_{\alpha\beta}$ berechnen, so daß

$$a_R = \frac{f}{h} \sum_{\alpha, \beta} l_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^R$$

wird. Die Matrix $\Lambda = (l_{\alpha\beta})$ genügt dann der Gleichung $\Lambda^2 = \Lambda$ und ist vom Range 1.

Ist nämlich wie früher $X = (x_{pq-1})$ die reguläre Gruppenmatrix, so besitzen $\bar{A}X$ und $\bar{A}_{11}X$ dieselbe Spur $\sum_R \chi(R^{-1})x_R$. Daher muß sich eine Matrix h^{ten} Grades K bestimmen lassen, so daß

$$\bar{A}X = K^{-1} \bar{A}_{11} X K$$

wird. Speziell ergibt sich für $X = E_h$ die Gleichung $\bar{A} = K^{-1} \bar{A}_{11} K$. Setzt man nun $X = J$, so erhält man, da, wie leicht zu beweisen, $\bar{A}_{11} J = \bar{A}_{11}$ ist,

$$J \bar{A} = \bar{A} J = K^{-1} \bar{A}_{11} K = \bar{A}.$$

Daher ist

$$(18.) \quad \sum_s \chi(RS^{-1}) a_s = \frac{h}{f} a_R.$$

Man setze nun

$$\sum_s a_s a_{\beta\alpha}^{s-1} = l_{\alpha\beta}.$$

Dann wird

$$\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^R = \sum_s a_s \sum_{\alpha,\beta} a_{\beta\alpha}^{s-1} a_{\alpha\beta}^R.$$

Nun ist aber

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}^R a_{\beta\alpha}^{s-1} = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha}^{RS-1} = \chi(RS^{-1}).$$

Daher ist wegen (18.)

$$\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^R = \frac{h}{f} a_R,$$

also

$$a_R = \frac{f}{h} \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^R.$$

Diese Gleichung kann auch in der Form

$$A = \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$$

geschrieben werden. Es ergibt sich nun

$$A^2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} l_{\alpha\beta} l_{\gamma\delta} A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha,\beta,\delta} l_{\alpha\beta} l_{\beta\delta} A_{\alpha\delta}.$$

Da andererseits

$$A^2 = A = \sum_{\alpha,\delta} l_{\alpha\delta} A_{\alpha\delta}$$

ist, die Matrizen $A_{\alpha\beta}$ ferner linear unabhängig sind, so ergibt sich

$$\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} l_{\beta\delta} = l_{\alpha\delta},$$

also in der That $A^2 = A$. Außerdem wird

$$\sum_s a_{s-1RS} = \chi(R) = \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta}(R) = \chi(R) \sum_{\alpha} l_{\alpha\alpha}.$$

Daher ist die Spur $\sum_{\alpha} l_{\alpha\alpha}$ oder, was hier dasselbe ist, der Rang der Matrix A gleich 1.

Aus der eben durchgeführten Rechnung ergibt sich zugleich, daß eine Matrix $A = \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$ dann und nur dann eine Einheit bildet, wenn $\Lambda = (l_{\alpha\beta})$ der Gleichung $A^2 = \Lambda$ genügt, und daß der alsdann durch A bestimmte Charakter gleich $\chi(R) \sum_{\alpha} l_{\alpha\alpha}$ ist. Soll A eine primitive Einheit sein, so kommt noch hinzu, daß $\sum_{\alpha} l_{\alpha\alpha} = 1$, also Λ vom Range 1 sein muß.

Es ist noch folgendes zu bemerken.

Da die Determinanten $\begin{vmatrix} l_{\alpha\beta} & l_{\alpha\delta} \\ l_{\gamma\beta} & l_{\gamma\delta} \end{vmatrix}$ sämtlich verschwinden, so lassen sich $2n$ Größen k'_α und k_β bestimmen, so daß $l_{\alpha\beta} = k'_\alpha k_\beta$ wird. Die Bedingung $\sum_\alpha l_{\alpha\alpha} = 1$ besagt dann, daß $\sum_\alpha k'_\alpha k_\alpha = 1$ ist. Sind umgekehrt k'_α und k_β irgendwelche $2n$ Größen, zwischen denen die Relation $\sum_\alpha k'_\alpha k_\alpha = 1$ besteht, und setzt man $l_{\alpha\beta} = k'_\alpha k_\beta$, so genügt die Matrix $A = (l_{\alpha\beta})$ der Gleichung $A^2 = A$ und ist vom Range 1.

Man erhält daher die sämtlichen den Charakter $\chi(R)$ bestimmenden Einheiten $A = (a_{PQ-1})$, indem man auf alle möglichen Arten $2n$ Größen k'_α und k_β bestimmt, die der Gleichung $\sum_\alpha k'_\alpha k_\alpha = 1$ genügen, und

$$A = \sum_{\alpha, \beta} k'_\alpha k_\beta A_{\alpha\beta}$$

setzt.

Schreibt man ferner für k_α das Zeichen $k_{\alpha 1}$, so lassen sich, wie man leicht schließt, $n(n-1)$ Größen

$$k_{\alpha 2}, k_{\alpha 3}, \dots, k_{\alpha n}$$

bestimmen, so daß

$$\sum_\beta k'_\beta k_{\beta 2} = 0, \dots, \sum_\beta k'_\beta k_{\beta n} = 0$$

wird, und daß außerdem die Determinante $|k_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist. Setzt man dann $K = (k_{\alpha\beta})$ und $K^{-1} = (k'_{\alpha\beta})$, so wird $k'_{1\beta} = k_\beta$. Bezeichnet man nun die Matrix $(a_{\alpha\beta}^R)$ mit A_R und setzt

$$K^{-1} A_R K = (c_{\alpha\beta}^R)$$

so wird

$$c_{11}^R = \sum_{\alpha, \beta} k'_{1\alpha} k_{\beta 1} a_{\alpha\beta}^R = \frac{h}{f} a_R.$$

Hieraus folgt, daß, wenn die Zahlen a_R eine den Charakter $\chi(R)$ bestimmende primitive Einheit bilden, man stets eine dem Charakter $\chi(R)$ entsprechende Darstellung angeben kann, deren Substitutionen in der ersten Zeile der Hauptdiagonale die Größen $\frac{h}{f} a_R$ enthalten.

Es seien allgemeiner

$$A_1 = (a_{PQ-1}^{(1)}), A_2 = (a_{PQ-1}^{(2)}), \dots, A_f = (a_{PQ-1}^{(f)})$$

irgendwelche f den Charakter $\chi(R)$ bestimmende Einheiten, für die noch die Gleichungen

$$A_\lambda A_\mu = 0 \quad (\lambda \neq \mu)$$

bestehen. Es sei nun

$$A_\lambda = \sum_{\alpha, \beta} k'_{\lambda\alpha} k_{\beta\lambda} A_{\alpha\beta},$$

so daß $\sum_{\alpha} k'_{\lambda\alpha} k_{\alpha\lambda} = 1$ ist. Dann ergibt sich aus $A_{\lambda} A_{\mu} = 0$ leicht

$$\sum k'_{\lambda\alpha} k_{\alpha\mu} = 0 \quad (\lambda \neq \mu).$$

Setzt man daher $K = (k_{\alpha\beta})$, so wird $|k_{\alpha\beta}| \neq 0$ und $K^{-1} = (k'_{\alpha\beta})$; ferner erhält man, falls wie früher $K^{-1} A_R K = (c_{\alpha\beta}^R)$ ist,

$$c_{\alpha\alpha}^R = \frac{h}{f} a_R^{(\alpha)}.$$

Sind daher $A_1, A_2, \dots, A_f$ irgendwelche f Einheiten der betrachteten Art, so läßt sich eine dem Charakter $\chi(R)$ entsprechende Darstellung der Gruppe angeben, deren Substitutionen in den Hauptdiagonalen die Größen

$$\frac{h}{f} a_R^{(1)}, \quad \frac{h}{f} a_R^{(2)}, \quad \dots, \quad \frac{h}{f} a_R^{(f)}$$

enthalten.