

expliqués que par un relâchement et une contraction de muscles, et comme les paupières ne possèdent, autant que nous le savons, d'autres muscles que des muscles soumis à la volonté, il me semble bien démontré que le grand sympathique agit aussi sur des muscles volontaires. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Remarque sur un théorème de M. Cauchy ;*
par M. HERMITE.

« C'est à M. Cauchy qu'on doit la première démonstration générale de la réalité des racines de l'équation remarquable à l'aide de laquelle se déterminent les inégalités séculaires des éléments du mouvement elliptique des planètes. Cette équation s'obtient, comme on sait, en égalant à zéro le déterminant du système

$$\Theta = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \theta, & a_{2,1}, \dots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2} - \theta, \dots, & a_{n,2} \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{n,3} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, \dots, & a_{n,n} - \theta \end{vmatrix}$$

dont les éléments $a_{\mu,\nu}$ sont des quantités réelles soumises à cette condition,

$$a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}.$$

» J'ai fait au sujet de cette équation la remarque suivante que l'illustre géomètre a bien voulu m'engager à communiquer à l'Académie. Supposons que les éléments $a_{\mu,\nu}$ du déterminant cessent d'être réels et prennent des valeurs imaginaires quelconques, mais avec la condition que $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ soient des quantités conjuguées. Il est aisé de voir que le nouveau déterminant ainsi formé et que je nommerai Ω , sera essentiellement réel quoique composé d'éléments imaginaires. Il ne change pas de valeur en effet en y mettant $-\sqrt{-1}$ au lieu de $\sqrt{-1}$, car on ne fait ainsi que remplacer $a_{\mu,\nu}$ par $a_{\nu,\mu}$, c'est-à-dire substituer les colonnes horizontales aux colonnes verticales, et l'on sait bien que cette transposition n'altère pas la valeur d'un déterminant. Cela posé, l'équation $\Omega = 0$ conserve la propriété si remarquable de l'équation $\Theta = 0$, elle a toutes ses racines essentiellement réelles. On peut le démontrer de plusieurs manières, par exemple en transformant le déterminant Ω en un autre à éléments réels, d'un nombre double de colonnes et symétrique par rapport à la diagonale, de manière à retrouver précisément la forme analytique du déterminant Θ . On obtient aussi une

démonstration directe en employant la belle et savante méthode qu'a donnée mon ami M. le Dr Borchardt, de Berlin, pour calculer les fonctions de M. Sturm dans le cas de l'équation $\Theta = 0$. Quoi qu'il en soit, la réalité des racines une fois établie, on détermine par la règle suivante combien il s'en trouve entre deux limites données θ_0 et θ_1 . Nommons Ω_i le déterminant du système

$$\cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} - \theta, & a_{2,1}, \dots, & a_{i,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2} - \theta, \dots, & a_{i,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,i}, & a_{2,i}, \dots, & a_{i,i} - \theta \end{pmatrix}$$

calculé de manière que le terme principal ait le signe +, et désignons par (θ) le nombre des termes positifs de la suite

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n.$$

» Si l'on suppose $\theta_1 > \theta_0$, la quantité (θ_0) sera plus grande que (θ_1) , et la différence $(\theta_0) - (\theta_1)$ sera précisément égale au nombre des racines de l'équation $\Omega = 0$ qui sont comprises entre θ_0 et θ_1 . On remarquera que la suite

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$$

est plus simple que la suite des dérivées du premier membre de l'équation proposée qui serviraient d'ailleurs au même usage à cause de la réalité de toutes ses racines, et sans doute il serait possible de passer directement de la seconde suite à la première, comme l'a fait M. Cauchy dans une circonstance analytique très-semblable (*Comptes rendus*, t. XL, p. 1329). Mais, au point de vue où je me suis placé, l'équivalence des deux suites, comme l'existence d'une infinité d'autres qui jouissent des mêmes propriétés, se déduisent immédiatement d'une proposition élémentaire et fondamentale de la théorie des formes quadratiques. Au reste, c'est dans l'étude algébrique des formes quadratiques, mais des formes quadratiques d'une nature toute particulière et dont je vais donner la définition, que vient s'offrir d'une manière directe l'équation $\Omega = 0$. Leur caractère principal consiste en ce que les indéterminées y sont partagées en deux groupes de variables imaginaires, les variables de l'un des groupes étant les conjuguées des variables de l'autre groupe. Ainsi, en représentant $2n$ variables imaginaires par

$$\begin{aligned} X &= x + x' \sqrt{-1}, & Y &= y + y' \sqrt{-1}, \dots, & U &= u + u' \sqrt{-1}, \\ X_0 &= x - x' \sqrt{-1}, & Y_0 &= y - y' \sqrt{-1}, \dots, & U_0 &= u - u' \sqrt{-1}, \end{aligned}$$