

57.e.5.

METHODUS Incrementorum Directa & Inversa.

AUCTORE
BROOK TAYLOR, LL.D. &
Regiæ Societatis Secretario.



L O N D I N I

Typis Pearsonianis : Prostant apud Gul. Innys ad Insignia
Principis in Cœmeterio Paulino. MDCCXV.

minatis omnibus $d, d, d, \&c.$ & aliquot ex terminis $c, c, c, \&c.$ per conditiones spectantes ad valores $v, v, v, \&c.$ reliqui terminorum $c, c, c, \&c.$ determinabuntur per conditiones spectantes ad valores $x, x, x, \&c.$ Unde per conditiones $m + p$ dabuntur omnes v , & per conditiones $m + \pi$ dabuntur omnes x , (Q. E. D.) & per conditiones omnino $m + p + \pi$ dabuntur omnes cum v , tum x . Quomodo autem conditiones applicandæ sint ad valores v & x , & suorum Incrementorum ipsis v & x superiorum, satis constat ex Propositione quartâ.

SCHOLIUM.

Ad eundem modum per eliminationes variabilium etiam pergere licet ad inventionem conditionum, quibus astringi possunt tres, vel quatuor, vel plures Equationes incrementales involventes tres, vel quatuor, vel plures variables præter z , cujus valores omnes dantur.

Sit Aequatio $z^m x^n - zx + b^3 = 0$. In hac Aequatione ad mentem Propositionis quartæ est x idem ac x , atque x idem ac x ; unde sunt $m = 2$, & $n = 2$. Quare per conditiones quatuor dabuntur omnes x , ex datis omnibus z . Et quoniam est x primum omnium $x, x, x, \&c.$ quæ in Aequatione occurrunt, ad minimum duæ conditiones applicandæ sunt ad valores ipsorum x & x ; ita, ut vel una conditio applicetur ad valorem x , & alia ad valorem x , vel utraque applicetur ad valorem x . Reliquæ autem conditiones possunt pro lubitu applicari ad valores omnium $x, x, x, \&c.$ in infinitum; ita, ut vel una conditio applicetur ad unum ex istis terminis, & alia ad alium; vel etiam ut omnes conditiones applicentur ad diversos valores ejusdem termini.

Sint

Sint duæ Equationes $x - v + vz = 0$, & $xz - v = 0$. In his

Æquationibus ad mentem hujus Propositionis est $p = 1$, $\pi = 2$, $a = 2$, $\alpha = 0$, $b = 1$, $\beta = 1$. Unde fit $a + \beta = 3$ & $a + b = 1$, adeoque $m = 3$ ($= a + \beta$), atque $m + p = 4$, $m + \pi = 5$, & $m + p + \pi = 6$. Proinde per quatuor conditiones dabuntur omnes valores v , per quinque dabuntur omnes x , & per sex conditiones dabuntur omnes cum x , tum v . Quarum conditionum ad minimum una referenda est ad valorem v , duæ ad valores x & x , reliquis tribus utcunque applicandis ad valores Incrementorum v , x , & inferiorum.

Sint Æquationes fluxionales duæ $v^3 - x^2 - z^2 = 0$, & $zv - zx^2x - x^4 = 0$. Tum ad mentem hujus Propositionis erunt

$$\begin{matrix} v = \dot{v}, & x = \dot{x}, & v = \ddot{v}, & x = \ddot{x}, & v = \dddot{v}, & \& & x = \dddot{x}, \\ p & \pi & \pi + a & \pi + a & p + b & & \pi + \beta \end{matrix}$$

adeoque $p = 1$, $\pi = 0$, $a = 0$, $\alpha = 1$, $b = 2$, $\beta = 4$, $a + \beta = 4$, $a + b = 3$; unde fit $m = 4$, $m + p = 5$, $m + \pi = 4$, atque $m + p + \pi = 5$. Dabuntur ergo omnes v & x ex datis omnibus z per conditiones omnino quinque; quarum ad minimum una pertinet ad valorem ipsius v , reliquæ possunt utcunque applicari ad valores ipsorum v , x , & Fluxionum suarum. Proinde si curvæ duæ sint describendæ, quarum ordinatæ sint v & x , & abscissa communis z , descriptâ curvâ cujus ordinata est v per quinque puncta data; vel per quatuor puncta & secante quintam ordinatam in angulo dato; vel in genere quæ transeat per unum punctum datum, & quatuor ordinatas positione datas fecet vel in punctis, vel in angulis datis, vel in earum extremitatibus habeat curvaturam datam, vel symptomata quædam curvaturæ pendentia a valoribus

Fluxionum $\ddot{v}$, $\ddot{v}$, & inferiorum; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ. Vel etiam si describatur altera curva, cujus ordinata est x ; ita, ut quatuor ordinatas vel fecet in punctis datis, vel alias

minatis omnibus $d, d, d, \&c.$ & aliquot ex terminis $c, c, c, \&c.$ per conditiones spectantes ad valores $v, v, v, \&c.$ reliqui terminorum $c, c, c, \&c.$ determinabuntur per conditiones spectantes ad valores $x, x, x, \&c.$ Unde per conditiones $m + p$ dabuntur omnes v , & per conditiones $m + \pi$ dabuntur omnes x , (Q. E. D.) & per conditiones omnino $m + p + \pi$ dabuntur omnes cum v , tum x . Quomodo autem conditiones applicandæ sint ad valores v & x , & suorum Incrementorum ipsis v & x superiorum, satis constat ex Propositione quartâ.

SCHOLIUM.

Ad eundem modum per eliminationes variabilium etiam pergere licet ad inventionem conditionum, quibus astringi possunt tres, vel quatuor, vel plures Equationes incrementales involventes tres, vel quatuor, vel plures variables præter z , cujus valores omnes dantur.

Sit Aequatio $z^2x - zx + b^3 = 0$. In hac Aequatione ad mentem Propositionis quartæ est x idem ac x , atque x idem ac x ; unde sunt $m = 2$, & $n = 2$. Quare per conditiones quatuor dabuntur omnes x , ex datis omnibus z . Et quoniam est x primum omnium $x, x, x, \&c.$ quæ in Aequatione occurrunt, ad minimum duæ conditiones applicandæ sunt ad valores ipsorum x & x ; ita, ut vel una conditio applicetur ad valorem x , & alia ad valorem x , vel intraque applicetur ad valorem x . Reliquæ autem conditiones possunt pro lubitu applicari ad valores omnium $x, x, x, \&c.$ in infinitum; ita, ut vel una conditio applicetur ad unum ex istis terminis, & alia ad alium; vel etiam ut omnes conditiones applicentur ad diversos valores ejusdem termini.

Sint

Sint duæ Æquationes $x - v + vx = 0$, & $xz - v = 0$. In his Æquationibus ad mentem hujus Propositionis est $p = 1$, $\pi = 2$, $a = 2$, $\alpha = 0$, $b = 1$, $\beta = 1$. Unde fit $a + \beta = 3$ & $a + b = 1$, adeoque $m = 3$ ($= a + \beta$) atque $m + p = 4$, $m + \pi = 5$, & $m + p + \pi = 6$. Proinde per quatuor conditiones dabuntur omnes valores v , per quinque dabuntur omnes x , & per sex conditiones dabuntur omnes cum x , tum v . Quarum conditionum ad minimum una referenda est ad valorem v , duæ ad valores x & x , reliquis tribus utcunque applicandis ad valores Incrementorum v , x , & inferiorum.

Sint Æquationes fluxionales duæ $\dot{v}^2 - \dot{x}^2 - \dot{z}^2 = 0$, & $\ddot{z}\dot{v} - \dot{z}\dot{x}^2 - \dot{x}\dot{x}^4 = 0$. Tum ad mentem hujus Propositionis erunt $v = \dot{v}$, $x = \dot{x}$, $v = \dot{v}$, $x = \dot{x}$, $v = \dot{v}$, & $x = \dot{x}$; $p = \pi$, $\pi = a$, $\pi + a$, $\pi + a$, $p + b$, $\pi + \beta$ adeoque $p = 1$, $\pi = 0$, $a = 0$, $\alpha = 1$, $b = 2$, $\beta = 4$, $a + \beta = 4$, $a + b = 3$; unde fit $m = 4$, $m + p = 5$, $m + \pi = 4$, atque $m + p + \pi = 5$. Dabuntur ergo omnes v & x ex datis omnibus z per conditiones omnino quinque; quarum ad minimum una pertinet ad valorem ipsius v , reliquæ possunt utcunque applicari ad valores ipsorum v , x , & Fluxionum suarum. Proinde si curvæ duæ sint describendæ, quarum ordinatæ sint v & x , & abscissa communis z , descriptâ curvâ cujus ordinata est v per quinque puncta data; vel per quatuor puncta & secante quintam ordinatam in angulo dato; vel in genere quæ transeat per unum punctum datum, & quatuor ordinatas positione datas fecet vel in punctis, vel in angulis datis, vel in earum extremitatibus habeat curvaturam datam, vel symptomata quædam curvaturæ pendentia a valoribus Fluxionum $\dot{v}$, $\dot{v}$, & inferiorum; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ. Vel etiam si describatur altera curva, cujus ordinata est x ; ita, ut quatuor ordinatas vel fecet in punctis datis, vel alias

E

fecet

fecet in punctis, alias in angulis datis; vel in earum extremitatibus curvaturas datas habeat, vel habeat alia quævis symptomata curvaturæ pendentia a Fluxionibus tertiis, quantis, & inferioribus; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ ex dato præterea uno valore v . Et modò detur una conditio respiciens valorem v , conditiones reliquæ poterunt pro lubitu distribui inter valores ordinarum x & v , & Fluxionum suarum.

Porro in his casibus possunt duo vel plures dati valores z inter se æquari, vel (quod idem est in Geometriâ) possunt duæ vel plures ex ordinatis positione datis coincidere. Sed hoc pendet a certis conditionibus petendis ex naturâ Æquationum quarumvis propositarum.

Sic propositis duabus Æquationibus $xv = z$ & $xz + \ddot{x} - \ddot{vv} = 0$, per hanc propositionem erunt conditiones quatuor, quæ possunt pro lubitu applicari ad valores x & v , & Fluxionum suarum. Sed ob Æquationem primam $xv = z$ non possunt coincidere ordinatæ, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores utriusque v & x ; nec ob Æquationem secundam possunt coincidere omnes quatuor ordinatæ, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores omnium $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{v}$; nam datis simul utrisque x & v determinatur z per Æquationem primam; & datis simul omnibus $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{v}$, item determinatur z per Æquationem secundam; utrumque contra Hypothesin. Eodem modo capiendo Fluxionem Æquationis primæ (pro z scripto 1 ut prius) invenies $xv + xv = 1$; unde etiam constat non posse coincidere omnes ordinatas, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores omnium $x, \dot{x}, v, \dot{v}$. Et iterum capiendo Fluxiones Æquationum propositarum forsân dabuntur alii limites hujusmodi conditionum.

Adhæc, ut in Æquationibus integrales tantum involventibus, sic in Æquationibus incrementalibus, quantitates variabiles sunt certis limitibus obnoxia. Sit exemplum in Æquatione fluxionali $x^2 - ax$

$$+ z = 0.$$

$+z=0$. Hinc est $x = \sqrt{ax - z}$; unde erit x (adeoque & omnes ipsius Fluxiones) impossibilis ubi est $ax < z$. Eiusdem Æquationis Fluxio secunda est $2x^2 + 2xx - ax^4 = 0$; unde fit $x = \sqrt{\frac{1}{2}ax - xx}$; erit ergò semper $xx > \frac{1}{2}ax$. Et eodem modo per ultiores Fluxiones Æquationis propositæ forsan invenies alios limites variabilium.

LEMMA I.

In Æquatione plura ejusdem quantitatis variabilis Incrementa involvente, per nullam regulam generalem certò definiri potest ad quot dimensiones ascendat quantitas illa in Æquatione integrali definiente ejus relationem ad alias quantitates variabiles.

In Æquatione fluxionali $xx + xx + nxx + xz = 0$, quantitates sunt semel tantum affectæ, & ubi est $n = 2$, datur x ex dato z per Æquationem quadraticam; sed tamen si fiat $n = 3$, non dabitur x , nisi per Æquationem cubicam; si $n = 4$, non dabitur x , nisi per Æquationem biquadraticam; si $n = \frac{1}{3}$, non dabitur x , nisi per Æquationem quinque dimensionum: Denique si terminorum reliquorum coefficientes fiant generales, ut sit $xx + mx^2 + nxx + pxx = 0$, dubito an dimensiones Æquationis quæsitæ per ullam certam legem definiri possint, si quidem omninò dari potest x ex dato z per Æquationem terminorum numero finitam. Sit alia Æquatio

$4x^3z^2 - 4x^2z^2 = 1 + z^2 | x^2$. In hac Æquatione ascendit x ad tertiam dignitatem, & ascendit x ad secundam; attamen datur x ex datâ z per Æquationem duarum dimensionum, cujus radix est

$x = \frac{1 + z^2}{a + \sqrt{1 - a^2z}}$. Mutatis verò coefficientibus hæud certò scio an

dari possit x ex dato z per Æquationem finitam.

P R O P.

PROP. VI. PROB. IV.

*Datis tot Æquationibus, quantitates integrales & Incrementa ut-
cunque promiscuè involventibus, quot sunt variables x , v , y ,
&c. ad z referenda, cujus valores omnes dantur; invenire
relationes Integralium per Æquationes ab Incrementis liberas,
quæ per coefficientes invariables indeterminatas adaptari possint
ad conditiones Problematis per has Æquationes solvendi.*

SOLUTIO.

Tenta num Æquatio aliqua proposita, vel ejus multiplex, vel sub-
multiplex aliqua sit cognitum aliquod Incrementum quantitatis ali-
cujus cognitæ. Hoc si fit, vice istius Æquationis propositæ substitue
quantitatem illam cognitam factam æqualem quantitati cujus Incre-
mentum primum, vel secundum, vel aliud quoddam est nihil; prout
Æquatio proposita, vel ejus multiplex, vel submultiplex fit Incre-
mentum primum, vel secundum, vel aliud quoddam quantitatis istius
cognitæ. Hoc idem facto in omnibus Æquationibus propositis, si
Æquationes inventæ integrales tantum involvunt, dabitur Solutio in
terminis numero finitis; quæ per coefficientes indeterminatos in
quantitatibus assumptis accommodabitur ad conditiones Problematis.
Q. E. F.

Sed si hoc pacto Problema solvi nequit, per eliminationes varia-
bilium (ope Æquationum datarum, & novarum Æquationum inde
derivatarum per Prop. I. si opus est) quære tot novas Æquationes
quot sunt variables x , v , y , &c. præter z , quarum una involvat
tantum x cum suis Incrementis (nempe præter z ,) reliquæ involvant
duas tantum variables x & v , x & y , &c. (quarum una sit semper
 x) cum suis Incrementis (in omnibus Æquationibus semper subin-
tellecto z .) Per Æquationem involventem tantum x cum suis Incre-
mentis quære valorem ipsius x , expressum per dignitates ipsius z ,
ope Propositionis alicujus sequentis. Deinde ope hujus Æquationis
limi-

eliminenter x cum suis Incrementis ab Æquationibus involventibus tantum x & v , x & y , &c. cum suis incrementis; & per æquationes hoc modo resultantes quærantur valores ipsorum v , y , &c. expressi per dignitates ipsius z , eodem modo quo quærebatur valor ipsius x . Atque hoc pacto dabuntur omnes x , v , y , &c. expressi per dignitates ipsius z . Qui valores accommodabuntur ad conditiones Problematis ope coefficientium adhuc indeterminatorum. Et si horum valorum aliqui prodeunt in terminis numero finitis, vel in seriebus quæ ad expressiones finitas reduci possunt, ex hac parte dabitur solutio verè Mathematica in terminis numero finitis. Sed ubi Series ad terminos finitos reduci nequit, solutio pro Mechanicâ est habenda, atq; seriei usus erit in inventione radicis quæsitæ x , vel v , vel y , &c. per approximationes.

S C H O L I U M.

Reductio æquationum propositarum ad æquationes integrales in hac solutione plurimum pendet a solertiâ Analystæ in inventione incrementorum (per *Prop. 1.*) exercitati. Quare in hunc finem utile est quantitatum variis modis compositarum incrementa quærere, eaq; in tabulas referre, quæ deinde consuli possunt, quoties opus est alicujus incrementi integram invenire. Hujus generis est sequens tabella.

Incrementa.	Integrales.
1. $-ax + bxz + cxz^2 +$ $dz z^2 z^2 + \&c.$	$A + \frac{1}{1} ax + \frac{1}{2} bxz + \frac{1}{3} cxz^2 +$ $\frac{1}{4} dz z^2 z^2 + \&c.$
2. $\frac{ax}{zz} + \frac{bx}{zzz} + \frac{cx}{zzzz} +$ $\frac{dz}{zzzzzz} + \&c.$	$A - \frac{a}{1z} - \frac{b}{2zz} - \frac{c}{3zzz} -$ $\frac{d}{4zzzz} - \&c.$

F

Fluxiones.

Fluxiones.

Fluentes.

$$1. \dot{z} z^{\frac{+n}{-n}}$$

$$\frac{1}{+n+1} z^{\frac{+n+1}{-n+1}} + A.$$

$$2. \frac{\dot{z} z^{\theta-1} x^{\lambda-1}}{\lambda x z + \lambda x z \times z}$$

$$A + z^{\theta} x^{\lambda}$$

$$3. \frac{\dot{z} z^{\theta-1} x^{\lambda-1} v^{\mu-1}}{\lambda x z v + \lambda x z v + \mu v z x \times z} \times v^{\mu-1}$$

$$A + z^{\theta} x^{\lambda} v^{\mu}$$

$$4. \frac{\dot{z} z^{\theta-1} x^{\lambda-1} v^{\mu-1} y^{\pi-1}}{\lambda x z v y + \lambda x z v y + \mu v z x y + \pi y z x v \times}$$

$$A + z^{\theta} x^{\lambda} v^{\mu} y^{\pi}$$

Comparando expressiones cum hujusmodi exemplis solvuntur quædam Problemata. Sit æquatio $\ddot{x} x x - \ddot{x}^2 x - 2 \ddot{x}^2 x = 0$. Comparando hanc æquationem cum fluxionis tertiæ factore $\dot{z} x v +$

$\lambda x z v + \mu v z x$, invenitur $\dot{z} = 1$, $\lambda = -1$, $\mu = -2$, ipfis $\dot{x}$, $\dot{x}$, x in hac æquatione subeuntibus vices ipforum z , x , v , in fluxione istâ.

Unde fit fluens $\ddot{x} x^{\frac{-1}{-2}}$ æqualis quantitati datæ, (quoniam est ipsius fluxio æqualis nihilo.) Sit itaq, a quantitas data, atq; erit

$$\ddot{x} x^{\frac{-1}{-2}} = a z \quad (\text{nempe completis ordinibus fluxionum per di-}$$

gnitates fluxionis datæ z .) Hinc fit $\ddot{x} = a z x x^{\frac{2}{-2}}$; unde iterum re-

grediendo ad fluentes (ad exemplum fluxionis $\dot{z} z^{\frac{+n}{-n}}$) fit $\dot{x} =$

$$\frac{a z x^3}{3} + b z.$$

Quo pacto jam revocatur æquatio fluxionalis ordinis tertii ad æquationem fluxionalem ordinis tantum primi.

Ad eundem modum potest æquatio $\ddot{x}^2 = x^3 z^4$, vel (pro z scri-

pto 1) $\ddot{x}^2 = x^3$ revocari ad ordinem superiorem. Nam extrahendo radicem

radicem fit $x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$. Duc æquationem in x , atq; fit $xx^{\frac{3}{2}} =$
 $xx^{\frac{3}{2}}$; unde capiendos fluentes fit $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + a$.

Sit alia æquatio $x^2 = ax$: tum extractâ radice fit $x = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$,
hoc est $xx^{\frac{1}{2}} = xx^{\frac{3}{2}}$, unde capiendos fluentes fit $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + a$,
vel si placet $x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + a$. Et hoc modo per multiplicationes, di-
visiones, & extractiones radicûm reducendo expressiones ad formas
fluxionum cognitarum, vel inveniuntur ipsæ fluentes, vel revocan-
tur æquationes ad fluxionum ordines superiores.

PROP. VII. THEOR. III.

*Sint z & x quantitates duæ variabiles, quarum z uniformiter
augetur per data incrementa z , & fit $nz = v$, $v - z = \dot{v}$,
 $\dot{v} - z = \ddot{v}$, & sic porro. Tum dico quod quo tem-
pore z crescendo fit $z + v$, x item crescendo fiet*

$$x + x \frac{v}{1z} + x \frac{vv}{1.2z^2} + x \frac{v \dot{v} \ddot{v}}{1.2.3z^3} + \&c.$$

DEMON.

DEMONSTRATIO.

x	x	x	x	x	$\&c.$
$x+x$	$x+x$	$x+x$	$x+x$	$\&c.$	
$x+2x+x$	$x+2x+x$	$x+2x+x$	$\&c.$		
$x+3x+3x+x$	$x+3x+3x+x$	$\&c.$			
$x+4x+6x+4x+x$	$\&c.$				
$\&c.$					

Valores successivi ipsius x per additionem continuam collecti sunt x , $x+x$, $x+2x+x$, $x+3x+3x+x$, $\&c.$ ut patet per operationem in tabula annexa expressam. Sed in his valoribus x coefficientes numerales terminorum x , x , x , $\&c.$ eodem modo formantur, ac coefficientes terminorum correspondentium in dignitate binomii. Et (per Theorema *Newtonianum*) si dignitatis index fit n , coefficientes erunt $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}, \&c.$ Er-

gò quo tempore z crescendo fit $z + nz$, hoc est $z + v$, fiet x aequa-

lis seriei $x + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}x + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}x + \&c.$

Sed sunt $\frac{n}{1} = \left(\frac{nz}{z} = \right) \frac{v}{z}, \frac{n-1}{2} = \left(\frac{nz - z}{2z} = \right) \frac{v}{2z}, \frac{n-2}{3} =$

(nz

$\left(\frac{nz - 2z}{3z} \right) = \frac{\ddot{v}}{z}$, &c. Proinde quo tempore z crescendo fit $z + v$,

eodem tempore x crescendo fiet $x + x \frac{v}{1z} + x \frac{vv}{1.2z^2} + x \frac{v\ddot{v}}{1.2.3z^3} +$
 $+ \&c.$

C O R O L L. I.

Et ipsis z , x , $\ddot{v}$, $\ddot{v}$, &c. iisdem manentibus, mutato signo ipsius v ,
 quo tempore z decrescendo fit $z - v$, eodem tempore x decrescen-

do fiet $x - x \frac{v}{1z} + x \frac{vv}{1.2z^2} - x \frac{v\ddot{v}}{1.2.3z^3}$ &c. vel juxta notatio-

nem nostram $x - x \frac{v}{1z} + x \frac{vv}{1.2z^2} - x \frac{v\ddot{v}}{1.2.3z^3}$ &c. ipsis $\dot{v}$, $\ddot{v}$, &c.

conversis in $-v$, $-v$, &c.

C O R O L L. II.

Si pro Incrementis evanescentibus scribantur fluxiones ipsis pro-
 portionales, factis jam omnibus $\ddot{v}$, $\dot{v}$, v , $\dot{v}$, v , &c. aequalibus

quo tempore z uniformiter fluendo fit $z + v$ fiet x , $x + x \frac{v}{1z} +$

$x \frac{v^2}{1.2z^2} + x \frac{v^3}{1.2.3z^3}$ &c. vel mutato signo ipsius v , quo tem-

pore z decrescendo fit $z - v$, x decrescendo fiet $x - x \frac{v}{1z} +$

$x \frac{v^2}{1.2z^2} - x \frac{v^3}{1.2.3z^3} + \&c.$

G

PROP.

PROP. VIII. PROB. V.

Data Equatione præter uniformiter crescentem z involvente quovis incrementa alterius variabilis x ; invenire valorem x ex dato z per seriem terminorum numero infinitam.

Per Propositionem primam quare æquationis propositæ incrementa omnia in infinitum. Tum si sit $\frac{x}{n}$ infimum incrementum ipsius x in æquatione propositâ per has æquationes dabuntur omnia incrementa $\frac{x}{n}$ & inferiora expressa per incrementa ipsa $\frac{x}{n}$ superiora.

Sint a , & c, c, c, c , &c. certi quidam valores correspondentes ipsorum z & x, x, x, x , &c. atque per easdem æquationes dabuntur omnes termini $\frac{c}{n}, \frac{c}{n+1}$, & sequentes expressi per terminos præcedentes ipsum $\frac{c}{n}$. Unde si pro z scribatur $a + v$, dabitur x per

$$\text{æquationem } x = c + c \frac{v}{1z} + c \frac{v v}{1.2z^2} + c \frac{v v v}{1.2.3z^3} + \&c. \text{ (per}$$

Prop. 7.) Ubi terminorum coefficientes c, c, c , &c quorum numerus est n , dabuntur per totidem conditiones Problematis.

SCHOLIUM.

Ubi est x compositum aliquod ex dignitatibus integris affirmativis ipsius z , evanescentibus incrementis inferioribus, post certum numerum terminorum series abrumperetur & fiet finita. Sit æquatio $xz - x + 1 = 0$, & fit $z = 1$. Tum capiendo incrementa, fiet $xz + x = 0$.

Sed

Sed hoc fieri nequit nisi sit $x = 0$; aliàs enim determinaretur z per æquationem $z + 1 = 0$. Ergò si pro z scribatur $a + v$, & sint c & c ipsorum x & x valores quando $v = 0$, erit semper $x = c + cv$, hoc est, (pro c scripto ipsius valore per æquationem propositam invento) $x = c + \frac{c-1}{a} v$, hoc est (pro v scripto ipsius valore $z - a$) $x = 1 + \frac{c-1}{a} z$.

In seriebus hoc modo prodeuntibus post aliquot terminos ex observatâ analogiâ plerumque possunt inveniri coefficientes sequentes absque ulteriori calculo. Et possunt nonnunquam series inventæ comparari cum aliis seriebus cognitis, quæ producuntur a cognitis expressionibus finitis: quare vice serierum substitutis istis expressionibus finitis, eo pacto dabuntur integrales in terminis numero finitis.

Sit æquatio fluxionalis $\ddot{x}z + n\dot{x}x - x - x^2 = 0$, ubi pro z scribitur 1. Hinc fit $\ddot{x} = \frac{\dot{x} + x^2}{z + nx}$ vel (pro $z + nx$ scripto y) $\ddot{x} = \frac{\dot{x} + x^2}{y}$

Et per calculum continuatum invenietur $\ddot{x} = (2 - n \times \frac{\dot{x}^2 + x^3}{y^2} =)$

$\frac{2 - n}{y^2} \dot{x}^2, \dot{x} = 3 - 2n \frac{\dot{x}}{y} x, x = 4 - 3n \frac{\dot{x}^2}{y^2} x$, & sic porro. Quare

(pro $a + nc$ scripto p ,) per hanc Prop. erit $x = c + cv + \frac{c^2 v^2}{2} +$

$\frac{2 - n}{1.2.3p} c^2 v^3 + \frac{2 - n.3 - 2n.c^2}{1.2.3.4p^2} v^4 + \&c.$ hoc est $x = c + cv +$

$\frac{c^2 p^2}{nc^2} \times \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} c^2 v^2 + \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \times \frac{2 - n}{3p} c^3 v^3 + \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \times \frac{2 - n}{3p} \times \frac{3 - 2n}{4p} c^4 v^4$

+ &c. Sed numeri $n, 1, 2 - n, 3 - 2n, \&c.$ producuntur per continuam subductionem numeri $n - 1$. Quare si fit $p = n - 1$, erit series

$\frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} c^2 v^2 + \frac{n}{p} \times \frac{2 - n}{3p} c^3 v^3 + \&c. = 1 + cv|^{\frac{n}{n-1}} - 1 +$