# Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

Es ist wohlbekannt, daß die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho \qquad (1)$$

in Verbindung mit der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes die Newtonsche Fernwirkungstheorie noch nicht vollständig ersetzt. Es muß noch die Bedingung hinzutreten, daß im räumlich Unendlichen das Potential $\phi$ einem festen Grenzwerte zustrebt. Analog verhält es sich bei der Gravitationstheorie der allgemeinen Relativität: auch hier müssen zu den Differentialgleichungen Grenzbedingungen hinzutreten für das räumlich Unendliche, falls man die Welt wirklich als räumlich unendlich ausgedehnt anzusehen hat.

Bei der Behandlung des Planetenproblems habe ich diese Grenzbedingungen in Gestalt folgender Annahme gewählt: Es ist möglich, ein Bezugssystem so zu wählen, daß sämtliche Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ im räumlich Unendlichen konstant werden. Es ist aber a priori durchaus nicht evident, daß man dieselben Grenzbedingungen ansetzen darf, wenn man größere Partien der Körperwelt ins Auge fassen will. Im folgenden sollen die Überlegungen angegeben werden, welche ich bisher über diese prinzipiell wichtige Frage angestellt habe.

## § 1. Die Newtonsche Theorie.

Es ist wohlbekannt, daß die Newtonsche Grenzbedingung des konstanten Limes für $\phi$ im räumlich Unendlichen zu der Auffassung hinführt, daß die Dichte der Materie im Unendlichen zu null wird. Wir denken uns nämlich, es lasse sich ein Ort im Weltraum finden, um den herum das Gravitationsfeld der Materie, im großen betrachtet, Kugelsymmetrie besitzt (Mittelpunkt). Dann folgt aus der Poissonschen Gleichung, daß die mittlere Dichte $\rho$ rascher als $\frac{1}{r^2}$ mit wachsender Entfernung $r$ vom Mittelpunkt zu null herabsinken muß, damit $\phi$ im

Unendlichen einem Limes zustrebe[1]. In diesem Sinne ist also die Welt nach Newton endlich, wenn sie auch unendlich große Gesamtmasse besitzen kann.

Hieraus folgt zunächst, daß die von den Himmelskörpern emittierte Strahlung das Newtonsche Weltsystem auf dem Wege radial nach außen zum Teil verlassen wird, um sich dann wirkungslos im Unendlichen zu verlieren. Kann es nicht ganzen Himmelskörpern ebenso ergehen? Es ist kaum möglich, diese Frage zu verneinen. Denn aus der Voraussetzung eines endlichen Limes für $\phi$ im räumlich Unendlichen folgt, daß ein mit endlicher kinetischer Energie begabter Himmelskörper das räumlich Unendliche unter Überwindung der Newtonschen Anziehungskräfte erreichen kann. Dieser Fall muß nach der statistischen Mechanik solange immer wieder eintreten, als die gesamte Energie des Sternsystems genügend groß ist, um — auf einen einzigen Himmelskörper übertragen — diesem die Reise ins Unendliche zu gestatten, von welcher er nie wieder zurückkehren kann.

Man könnte dieser eigentümlichen Schwierigkeit durch die Annahme zu entrinnen versuchen, daß jenes Grenzpotential im Unendlichen einen sehr hohen Wert habe. Dies wäre ein gangbarer Weg, wenn nicht der Verlauf des Gravitationspotentials durch die Himmelskörper selbst bedingt sein müßte. In Wahrheit werden wir mit Notwendigkeit zu der Auffassung gedrängt, daß das Auftreten bedeutender Potentialdifferenzen des Gravitationsfeldes mit den Tatsachen im Widerspruch ist. Dieselben müssen vielmehr von so geringer Größenordnung sein, daß die durch sie erzeugbaren Sterngeschwindigkeiten die tatsächlich beobachteten nicht übersteigen.

Wendet man das Boltzmannsche Verteilungsgesetz für Gasmoleküle auf die Sterne an, indem man das Sternsystem mit einem Gase von stationärer Wärmebewegung vergleicht, so folgt, daß das Newtonsche Sternsystem überhaupt nicht existieren könne. Denn der endlichen Potentialdifferenz zwischen dem Mittelpunkt und dem räumlich Unendlichen entspricht ein endliches Verhältnis der Dichten. Ein Verschwinden der Dichte im Unendlichen zieht also ein Verschwinden der Dichte im Mittelpunkt nach sich.

Diese Schwierigkeiten lassen sich auf dem Boden der Newtonschen Theorie wohl kaum überwinden. Man kann sich die Frage vorlegen, ob sich dieselben durch eine Modifikation der Newtonschen Theorie beseitigen lassen. Wir geben hierfür zunächst einen Weg an,

[1] $\rho$ ist die mittlere Dichte der Materie, gebildet für einen Raum, der groß ist gegenüber der Distanz benachbarter Fixsterne, aber klein gegenüber den Abmessungen des ganzen Sternsystems.

der an sich nicht beansprucht, ernst genommen zu werden; er dient nur dazu, das Folgende besser hervortreten zu lassen. An die Stelle der Poissonschen Gleichung setzen wir

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi K\rho, \tag{2}$$

wobei $\lambda$ eine universelle Konstante bedeutet. Ist $\rho_0$ die (gleichmäßige) Dichte einer Massenverteilung, so ist

$$\phi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0 \tag{3}$$

eine Lösung der Gleichung (2). Diese Lösung entspräche dem Falle, daß die Materie der Fixsterne gleichmäßig über den Raum verteilt wäre, wobei die Dichte $\rho_0$ gleich der tatsächlichen mittleren Dichte der Materie des Weltraumes sein möge. Die Lösung entspricht einer unendlichen Ausdehnung des im Mittel gleichmäßig mit Materie erfüllten Raumes. Denkt man sich, ohne an der mittleren Verteilungsdichte etwas zu ändern, die Materie örtlich ungleichmäßig verteilt, so wird sich über den konstanten $\phi$-Wert der Gleichung (3) ein zusätzliches $\phi$ überlagern, welches in der Nähe dichterer Massen einem Newtonschen Felde um so ähnlicher ist, je kleiner $\lambda_0$ gegenüber $4\pi K\rho$ ist.

Eine so beschaffene Welt hätte bezüglich des Gravitationsfeldes keinen Mittelpunkt. Ein Abnehmen der Dichte im räumlich Unendlichen müßte nicht angenommen werden, sondern es wäre sowohl das mittlere Potential als auch die mittlere Dichte bis ins Unendliche konstant. Der bei der Newtonschen Theorie konstatierte Konflikt mit der statistischen Mechanik ist hier nicht vorhanden. Die Materie ist bei einer bestimmten (äußerst kleinen) Dichte im Gleichgewicht, ohne daß für dies Gleichgewicht innere Kräfte der Materie (Druck) nötig wären.

## § 2. Die Grenzbedingungen gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie.

Im folgenden führe ich den Leser auf dem von mir selbst zurückgelegten, etwas indirekten und holperigen Wege, weil ich nur so hoffen kann, daß er dem Endergebnis Interesse entgegenbringe. Ich komme nämlich zu der Meinung, daß die von mir bisher vertretenen Feldgleichungen der Gravitation noch einer kleinen Modifikation bedürfen, um auf der Basis der allgemeinen Relativitätstheorie jene prinzipiellen Schwierigkeiten zu vermeiden, die wir im vorigen Paragraphen für die Newtonsche Theorie dargelegt haben. Diese Modifikation entspricht vollkommen dem Übergang von der Poissonschen Gleichung (1) zur Gleichung (2) des vorigen Paragraphen. Es ergibt sich dann schließlich, daß Grenzbedingungen im räumlich Unendlichen überhaupt entfallen, da das Weltkontinuum bezüglich seiner räumlichen Erstreckungen als ein in sich geschlossenes von endlichem, räumlichem (dreidimensionalem) Volumen aufzufassen ist.

Meine bis vor kurzem gehegte Meinung über die im räumlich Unendlichen zu setzenden Grenzbedingungen fußte auf folgenden Überlegungen. In einer konsequenten Relativitätstheorie kann es keine Trägheit gegenüber dem »Raume« geben, sondern nur eine Trägheit der Massen gegeneinander. Wenn ich daher eine Masse von allen anderen Massen der Welt räumlich genügend entferne, so muß ihre Trägheit zu Null herabsinken. Wir suchen diese Bedingung mathematisch zu formulieren.

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie ist der (negative) Impuls durch die drei ersten Komponenten, die Energie durch die letzte Komponente des mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten kovarianten Tensors

$$m\sqrt{-g}\, g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} \tag{4}$$

gegeben, wobei wie stets

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \tag{5}$$

gesetzt ist. In dem besonders übersichtlichen Falle, daß das Koordinatensystem so gewählt werden kann, daß das Gravitationsfeld in jedem Punkte räumlich isotrop ist, hat man einfacher

$$ds^2 = -A(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + B dx_4^2 .$$

Ist gleichzeitig noch

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3 B}\,,$$

so erhält man für kleine Geschwindigkeiten in erster Näherung aus (4) für die Impulskomponenten

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4} \qquad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4} \qquad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4}$$

und für die Energie (im Fall der Ruhe)

$$m\sqrt{B}\,.$$

Aus den Ausdrücken des Impulses folgt, daß $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ die Rolle der trägen Masse spielt. Da $m$ eine dem Massenpunkt unabhängig von seiner Lage eigentümliche Konstante ist, so kann dieser Ausdruck unter Wahrung der Determinantenbedingung im räumlich Unendlichen nur dann verschwinden, wenn $A$ zu null herabsinkt, während $B$ ins

Unendliche anwächst. Ein solches Ausarten der Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ scheint also durch das Postulat von der Relativität aller Trägheit gefordert zu werden. Diese Forderung bringt es auch mit sich, daß die potentielle Energie $m\sqrt{B}$ des Punktes im Unendlichen unendlich groß wird. Es kann also ein Massenpunkt niemals das System verlassen; eine eingehendere Untersuchung zeigt, daß gleiches auch von den Lichtstrahlen gelten würde. Ein Weltsystem mit solchem Verhalten der Gravitationspotentiale im Unendlichen wäre also nicht der Gefahr der Verödung ausgesetzt, wie sie vorhin für die Newtonsche Theorie besprochen wurde.

Ich bemerke, daß die vereinfachenden Annahmen über die Gravitationspotentiale, welche wir dieser Betrachtung zugrunde legten, nur der Übersichtlichkeit wegen eingeführt sind. Man kann allgemeine Formulierungen für das Verhalten der $g_{\mu\nu}$ im Unendlichen finden, die das Wesentliche der Sache ohne weitere beschränkende Annahmen ausdrücken.

Nun untersuchte ich mit der freundlichen Hilfe des Mathematikers J. Grommer zentrisch symmetrische, statische Gravitationsfelder, welche im Unendlichen in der angedeuteten Weise degenerierten. Die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ wurden angesetzt und aus denselben auf Grund der Feldgleichungen der Gravitation der Energietensor $T_{\mu\nu}$ der Materie berechnet. Dabei zeigte sich aber, daß für das Fixsternsystem derartige Grenzbedingungen durchaus nicht in Betracht kommen können, wie neulich auch mit Recht von dem Astronomen de Sitter hervorgehoben wurde.

Der kontravariante Energietensor $T^{\mu\nu}$ der ponderabeln Materie ist nämlich gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \tag{5}$$

wobei $\rho$ die natürlich gemessene Dichte der Materie bedeutet. Bei geeignet gewähltem Koordinatensystem sind die Sterngeschwindigkeiten sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Man kann daher $ds$ durch $\sqrt{g_{44}}\,dx_4$ ersetzen. Daran erkennt man, daß alle Komponenten von $T^{\mu\nu}$ gegenüber der letzten Komponente $T^{44}$ sehr klein sein müssen. Diese Bedingung aber ließ sich mit den gewählten Grenzbedingungen durchaus nicht vereinigen. Nachträglich erscheint dies Resultat nicht verwunderlich. Die Tatsache der geringen Sterngeschwindigkeiten läßt den Schluß zu, daß nirgends, wo es Fixsterne gibt, das Gravitationspotential (in unserem Falle $\sqrt{B}$) erheblich größer sein kann als bei uns; es folgt dies aus statistischen Überlegungen, genau wie im Falle der Newtonschen Theorie. Jedenfalls haben mich unsere Rechnungen zu der Überzeugung geführt, daß derartige Degenerationsbedingungen für die $g_{\mu\nu}$ im Räumlich-Unendlichen nicht postuliert werden dürfen.

Nach dem Fehlschlagen dieses Versuches bieten sich zunächst zwei Möglichkeiten dar.

a) Man fordert, wie beim Planetenproblem, daß im räumlich Unendlichen die $g_{\mu\nu}$ sich bei passend gewähltem Bezugssystem den Werten

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

nähern.

b) Man stellt überhaupt keine allgemeine Gültigkeit beanspruchenden Grenzbedingungen auf für das räumlich Unendliche; man hat die $g_{\mu\nu}$ an der räumlichen Begrenzung des betrachteten Gebietes in jedem einzelnen Falle besonders zu geben, wie man bisher die zeitlichen Anfangsbedingungen besonders zu geben gewohnt war.

Die Möglichkeit b entspricht keiner Lösung des Problems, sondern dem Verzicht auf die Lösung desselben. Dies ist ein unanfechtbarer Standpunkt, der gegenwärtig von de Sitter eingenommen wird[1]. Ich muß aber gestehen, daß es mir schwer fällt, so weit zu resignieren in dieser prinzipiellen Angelegenheit. Dazu würde ich mich erst entschließen, wenn alle Mühe, zur befriedigenden Auffassung vorzudringen, sich als nutzlos erweisen würde.

Die Möglichkeit a ist in mehrfacher Beziehung unbefriedigend. Erstens setzen diese Grenzbedingungen eine bestimmte Wahl des Bezugssystems voraus, was dem Geiste des Relativitätsprinzips widerstrebt. Zweitens verzichtet man bei dieser Auffassung darauf, der Forderung von der Relativität der Trägheit gerecht zu werden. Die Trägheit eines Massenpunktes von der natürlich gemessenen Masse $m$ ist nämlich von den $g_{\mu\nu}$ abhängig; diese aber unterscheiden sich nur wenig von den angegebenen postulierten Werten für das räumlich Unendliche. Somit würde die Trägheit durch die (im Endlichen vorhandene) Materie zwar beeinflußt aber nicht bedingt. Wenn nur ein einziger Massenpunkt vorhanden wäre, so besäße er nach dieser Auffassungsweise Trägheit, und zwar eine beinahe gleich große wie in dem Falle, daß er von den übrigen Massen unserer tatsächlichen Welt umgeben ist. Endlich sind gegen diese Auffassung jene statisti-

[1] de Sitter, Akad. van Wetensch. Te Amsterdam, 8. November 1916.

schen Bedenken geltend zu machen, welche oben für die NEWTONsche Theorie angegeben worden sind.

Es geht aus dem bisher Gesagten hervor, daß mir das Aufstellen von Grenzbedingungen für das räumlich Unendliche nicht gelungen ist. Trotzdem existiert noch eine Möglichkeit, ohne den unter b angegebenen Verzicht auszukommen. Wenn es nämlich möglich wäre, die Welt als ein nach seinen räumlichen Erstreckungen geschlossenes Kontinuum anzusehen, dann hätte man überhaupt keine derartigen Grenzbedingungen nötig. Im folgenden wird sich zeigen, daß sowohl die allgemeine Relativitätsforderung als auch die Tatsache der geringen Sterngeschwindigkeiten mit der Hypothese von der räumlichen Geschlossenheit des Weltganzen vereinbar ist; allerdings bedarf es für die Durchführung dieses Gedankens einer verallgemeinernden Modifikation der Feldgleichungen der Gravitation.

## § 3. Die räumlich geschlossene Welt mit gleichmäßig verteilter Materie.

Der metrische Charakter (Krümmung) des vierdimensionalen raumzeitlichen Kontinuums wird nach der allgemeinen Relativitätstheorie in jedem Punkte durch die daselbst befindliche Materie und deren Zustand bestimmt. Die metrische Struktur dieses Kontinuums muß daher wegen der Ungleichmäßigkeit der Verteilung der Materie notwendig eine äußerst verwickelte sein. Wenn es uns aber nur auf die Struktur im großen ankommt, dürfen wir uns die Materie als über ungeheure Räume gleichmäßig ausgebreitet vorstellen, so daß deren Verteilungsdichte eine ungeheuer langsam veränderliche Funktion wird. Wir gehen damit ähnlich vor wie etwa die Geodäten, welche die im kleinen äußerst kompliziert gestaltete Erdoberfläche durch ein Ellipsoid approximieren.

Das Wichtigste, was wir über die Verteilung der Materie aus der Erfahrung wissen, ist dies, daß die Relativgeschwindigkeiten der Sterne sehr klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Ich glaube deshalb, daß wir fürs erste folgende approximierende Annahme unserer Betrachtung zugrunde legen dürfen: Es gibt ein Koordinatensystem, relativ zu welchem die Materie als dauernd ruhend angesehen werden darf. Relativ zu diesem ist also der kontravariante Energietensor $T^{\mu\nu}$ der Materie gemäß (5) von der einfachen Form:

$$\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}\right| \qquad (6)$$

Der Skalar $\rho$ der (mittleren) Verteilungsdichte kann a priori eine Funktion der räumlichen Koordinaten sein. Wenn wir aber die Welt als räumlich in sich geschlossen annehmen, so liegt die Hypothese nahe, daß $\rho$ unabhängig vom Orte sei; diese legen wir dem Folgenden zugrunde.

Was das Gravitationsfeld anlangt, so folgt aus der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} + \left\{ {\alpha\beta \atop \nu} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0,$$

daß ein materieller Punkt in einem statischen Gravitationsfelde nur dann in Ruhe verharren kann, wenn $g_{44}$ vom Orte unabhängig ist. Da wir ferner Unabhängigkeit von der Zeitkoordinate $x_4$ für alle Größen voraussetzen, so können wir für die gesuchte Lösung verlangen, daß für alle $x_\nu$

$$g_{44} = 1 \tag{7}$$

sei. Wie stets bei statischen Problemen wird ferner

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0 \tag{8}$$

zu setzen sein. Es handelt sich nun noch um die Festlegung derjenigen Komponenten des Gravitationspotentials, welche das rein räumlich-geometrische Verhalten unseres Kontinuums bestimmen ($g_{11}, g_{12} \ldots g_{33}$). Aus unserer Annahme über die Gleichmäßigkeit der Verteilung der das Feld erzeugenden Massen folgt, daß auch die Krümmung des gesuchten Meßraumes eine konstante sein muß. Für diese Massenverteilung wird also das gesuchte geschlossene Kontinuum der $x_1, x_2, x_3$ bei konstantem $x_4$ ein sphärischer Raum sein.

Zu einem solchen gelangen wir z. B. in folgender Weise. Wir gehen aus von einem Euklidischen Raume der $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ von vier Dimensionen mit dem Linienelement $d\sigma$; es sei also

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \tag{9}$$

In diesem Raume betrachten wir die Hyperfläche

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2, \tag{10}$$

wobei $R$ eine Konstante bedeutet. Diese Punkte dieser Hyperfläche bilden ein dreidimensionales Kontinuum, einen sphärischen Raum vom Krümmungsradius $R$.

Der vierdimensionale Euklidische Raum, von dem wir ausgingen, dient nur zur bequemen Definition unserer Hyperfläche. Uns interessieren nur die Punkte der letzteren, deren metrische Eigenschaften mit denen des physikalischen Raumes bei gleichmäßiger Verteilung der Materie übereinstimmen sollen. Für die Beschreibung dieses dreidimensionalen Kontinuums können wir uns der Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ bedienen (Projektion auf die Hyperebene $\xi_4 = 0$), da sich vermöge (10) $\xi_4$ durch $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ausdrücken läßt. Eliminiert man $\xi_4$ aus (9), so erhält man für das Linienelement des sphärischen Raumes den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2-\rho^2} \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

wobei $\delta_{\mu\nu} = 1$, wenn $\mu = \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$, und $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ gesetzt wird. Die gewählten Koordinaten sind bequem, wenn es sich um die Untersuchung der Umgebung eines der beiden Punkte $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ handelt.

Nun ist uns auch das Linsenelement der gesuchten raum-zeitlichen vierdimensionalen Welt gegeben. Wir haben offenbar für die Potentiale $g_{\mu\nu}$, deren beide Indizes von 4 abweichen, zu setzen

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}\right), \tag{12}$$

welche Gleichung in Verbindung mit (7) und (8) das Verhalten von Maßstäben, Uhren und Lichtstrahlen in der betrachteten vierdimensionalen Welt vollständig bestimmt.

## § 4. Über ein an den Feldgleichungen der Gravitation anzubringendes Zusatzglied.

Die von mir vorgeschlagenen Feldgleichungen der Gravitation lauten für ein beliebig gewähltes Koordinatensystem

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \\ G_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha \\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta \\ \alpha\end{Bmatrix} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Das Gleichungssystem (13) ist keineswegs erfüllt, wenn man für die $g_{\mu\nu}$ die in (7), (8) und (12) gegebenen Werte und für den (kontravarianten) Tensor der Energie der Materie die in (6) angegebenen Werte einsetzt. Wie diese Rechnung bequem auszuführen ist, wird im nächsten Paragraphen gezeigt werden. Wenn es also sicher wäre, daß die von mir bisher benutzten Feldgleichungen (13) die einzigen mit dem Postulat der allgemeinen Relativität vereinbaren wären, so müßten wir wohl schließen, daß die Relativitätstheorie die Hypothese von einer räumlichen Geschlossenheit der Welt nicht zulasse.

Das Gleichungssystem (14) erlaubt jedoch eine naheliegende, mit dem Relativitätspostulat vereinbare Erweiterung, welche der durch Gleichung (2) gegebenen Erweiterung der Poissonschen Gleichung vollkommen analog ist. Wir können nämlich auf der linken Seite der Feldgleichung (13) den mit einer vorläufig unbekannten universellen Konstante $-\lambda$ multiplizierten Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ hinzufügen, ohne daß dadurch die allgemeine Kovarianz zerstört wird; wir setzen an die Stelle der Feldgleichung (13)

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \qquad (13a)$$

Auch diese Feldgleichung ist bei genügend kleinem $\lambda$ mit den am Sonnensystem erlangten Erfahrungstatsachen jedenfalls vereinbar. Sie befriedigt auch Erhaltungssätze des Impulses und der Energie, denn man gelangt zu (13a) an Stelle von (13), wenn man statt des Skalars des Riemannschen Tensors diesen Skalar, vermehrt um eine universelle Konstante, in das Hamiltonsche Prinzip einführt, welches Prinzip ja die Giltigkeit von Erhaltungssätzen gewährleistet. Daß die Feldgleichung (13a) mit unseren Ansätzen über Feld und Materie vereinbar ist, wird im folgenden gezeigt.

## § 5. Durchführung der Rechnung. Ergebnis.

Da alle Punkte unseres Kontinuums gleichwertig sind, genügt es, die Rechnung für *einen* Punkt durchzuführen, z. B. für einen der beiden Punkte mit den Koordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Dann sind für die $g_{\mu\nu}$ in (13a) die Werte

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

überall da einzusetzen, wo sie nur einmal oder gar nicht differenziert erscheinen. Man erhält also zunächst

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix} \mu\nu \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix} \mu\nu \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix} \mu\nu \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Mit Rücksicht auf (7), (8) und (13) findet man hieraus leicht, daß sämtlichen Gleichungen (13a) Genüge geleistet ist, wenn die beiden Relationen erfüllt sind

$$-\frac{2}{R^2}+\lambda=-\frac{\varkappa\rho}{2}$$

$$-\lambda=-\frac{\varkappa\rho}{2}$$

oder

$$\lambda=\frac{\varkappa\rho}{2}=\frac{1}{R^2} \tag{14}$$

Die neu eingeführte universelle Konstante $\lambda$ bestimmt also sowohl die mittlere Verteilungsdichte $\rho$, welche im Gleichgewichte verharren kann, als auch den Radius $R$ des sphärischen Raumes und dessen Volumen $2\pi^2 R^3$. Die Gesamtmasse $M$ der Welt ist nach unserer Auffassung endlich, und zwar gleich

$$M=\rho\cdot 2\pi^2 R^3=4\pi^2\frac{R}{\varkappa}=\frac{\sqrt{32\pi^2}}{\sqrt{\varkappa^3\rho}} \tag{15}$$

Die theoretische Auffassung der tatsächlichen Welt wäre also, falls dieselbe unserer Betrachtung entspricht, die folgende. Der Krümmungscharakter des Raumes ist nach Maßgabe der Verteilung der Materie zeitlich und örtlich variabel, läßt sich aber im großen durch einen sphärischen Raum approximieren. Jedenfalls ist diese Auffassung logisch widerspruchsfrei und vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie die naheliegendste; ob sie, vom Standpunkt des heutigen astronomischen Wissens aus betrachtet, haltbar ist, soll hier nicht untersucht werden. Um zu dieser widerspruchsfreien Auffassung zu gelangen, mußten wir allerdings eine neue, durch unser tatsächliches Wissen von der Gravitation nicht gerechtfertigte Erweiterung der Feldgleichungen der Gravitation einführen. Es ist jedoch hervorzuheben, daß eine positive Krümmung des Raumes durch die in demselben befindliche Materie auch dann resultiert, wenn jenes Zusatzglied nicht eingeführt wird; das letztere haben wir nur nötig, um eine quasistatische Verteilung der Materie zu ermöglichen, wie es der Tatsache der kleinen Sterngeschwindigkeiten entspricht.

Ausgegeben am 15. Februar.

# Doc. 43

## Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity [1]

This translation by W. Perrett and G. B. Jeffery is reprinted from H. A. Lorentz et al., *The Principle of Relativity* (Dover, 1952), pp. 175–188.

IT is well known that Poisson's equation

$$\nabla^2\phi = 4\pi K\rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in combination with the equations of motion of a material point is not as yet a perfect substitute for Newton's theory of action at a distance. There is still to be taken into account the condition that at spatial infinity the potential $\phi$ tends toward a fixed limiting value. There is an analogous state of things in the theory of gravitation in general relativity. Here, too, we must supplement the differential equations by limiting conditions at spatial infinity, if we really have to regard the universe as being of infinite spatial extent. [2]

In my treatment of the planetary problem I chose these limiting conditions in the form of the following assumption: it is possible to select a system of reference so that at spatial infinity all the gravitational potentials $g_{\mu\nu}$ become constant. [3] But it is by no means evident *a priori* that we may lay down the same limiting conditions when we wish to take larger portions of the physical universe into consideration. In the following pages the reflexions will be given which, up to the present, I have made on this fundamentally important question.

### § 1. The Newtonian Theory

It is well known that Newton's limiting condition of the constant limit for $\phi$ at spatial infinity leads to the view that the density of matter becomes zero at infinity. For we imagine that there may be a place in universal space round about which the gravitational field of matter, viewed on a large scale, possesses spherical symmetry. It then follows from Poisson's equation that, in order that $\phi$ may tend to a limit at infinity, the mean density $\rho$ must decrease toward zero more rapidly than $1/r^2$ as the distance $r$ from the centre increases.* In this sense, therefore, the universe according to Newton is finite, although it may possess an infinitely great total mass.

From this it follows in the first place that the radiation emitted by the heavenly bodies will, in part, leave the Newtonian system of the universe, passing radially outwards, to become ineffective and lost in the infinite. May not entire heavenly bodies fare likewise? It is hardly possible to give a negative answer to this question. For it follows from the assumption of a finite limit for $\phi$ at spatial infinity that a heavenly body with finite kinetic energy is able to reach spatial infinity by overcoming the Newtonian forces of attraction. By statistical mechanics this case must occur from time to time, as long as the total energy of the stellar system—transferred to one single star—is great enough to
[4] send that star on its journey to infinity, whence it never can return.

We might try to avoid this peculiar difficulty by assuming a very high value for the limiting potential at infinity. That would be a possible way, if the value of the gravitational potential were not itself necessarily conditioned by the heavenly bodies. The truth is that we are compelled to regard the occurrence of any great differences of potential of the gravitational field as contradicting the facts. These differences must really be of so low an order of magnitude that the stellar velocities generated by them do not exceed the velocities actually observed.

If we apply Boltzmann's law of distribution for gas molecules to the stars, by comparing the stellar system with a gas in thermal equilibrium, we find that the Newtonian stellar system cannot exist at all. For there is a finite ratio of densities corresponding to the finite difference of potential between the centre and spatial infinity. A vanishing of the density at infinity thus implies a vanishing of the density at the centre.

* $\rho$ is the mean density of matter, calculated for a region which is large as compared with the distance between neighbouring fixed stars, but small in comparison with the dimensions of the whole stellar system.

It seems hardly possible to surmount these difficulties on the basis of the Newtonian theory. We may ask ourselves the question whether they can be removed by a modification of the Newtonian theory. First of all we will indicate a method which does not in itself claim to be taken seriously; it merely serves as a foil for what is to follow. In place of Poisson's equation we write

$$\nabla^2\phi - \lambda\phi = 4\pi\kappa\rho \qquad . \quad . \quad . \quad (2)$$

where $\lambda$ denotes a universal constant. If $\rho_0$ be the uniform density of a distribution of mass, then

$$\phi = -\frac{4\pi\kappa}{\lambda}\rho_0 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

is a solution of equation (2). This solution would correspond to the case in which the matter of the fixed stars was distributed uniformly through space, if the density $\rho_0$ is equal to the actual mean density of the matter in the universe. The solution then corresponds to an infinite extension of the central space, filled uniformly with matter. If, without making any change in the mean density, we imagine matter to be non-uniformly distributed locally, there will be, over and above the $\phi$ with the constant value of equation (3), an additional $\phi$, which in the neighbourhood of denser masses will so much the more resemble the Newtonian field as $\lambda\phi$ is smaller in comparison with $4\pi\kappa\rho$. [5]

A universe so constituted would have, with respect to its gravitational field, no centre. A decrease of density in spatial infinity would not have to be assumed, but both the mean potential and mean density would remain constant to infinity. The conflict with statistical mechanics which we found in the case of the Newtonian theory is not repeated. With a definite but extremely small density, matter is in equilibrium, without any internal material forces (pressures) being required to maintain equilibrium.

## § 2. The Boundary Conditions According to the General Theory of Relativity

In the present paragraph I shall conduct the reader over the road that I have myself travelled, rather a rough and winding road, because otherwise I cannot hope that he will take much interest in the result at the end of the journey. The conclusion I shall arrive at is that the field equations of gravitation which I have championed hitherto still need a slight modification, so that on the basis of the general theory of relativity those fundamental difficulties may be avoided which have been set forth in § 1 as confronting the Newtonian theory. This modification corresponds perfectly to the transition from Poisson's equation (1) to equation (2) of § 1. We finally infer that boundary conditions in spatial infinity fall away altogether, because the universal continuum in respect of its spatial dimensions is to be viewed as a self-contained continuum of finite spatial (three-dimensional) volume.

The opinion which I entertained until recently, as to the limiting conditions to be laid down in spatial infinity, took its stand on the following considerations. In a consistent
[6] theory of relativity there can be no inertia *relatively to "space,"* but only an inertia of masses *relatively to one another*. If, therefore, I have a mass at a sufficient distance from all other masses in the universe, its inertia must fall to zero. We will try to formulate this condition mathematically.

According to the general theory of relativity the negative momentum is given by the first three components, the energy by the last component of the covariant tensor multiplied by $\sqrt{-g}$

$$m\sqrt{-g}\quad g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

where, as always, we set

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

In the particularly perspicuous case of the possibility of choosing the system of co-ordinates so that the gravitational field at every point is spatially isotropic, we have more simply

$$ds^2 = -\mathrm{A}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \mathrm{B}dx_4^2.$$

If, moreover, at the same time

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{\mathrm{A}^3\mathrm{B}}$$

we obtain from (4), to a first approximation for small velocities,

$$m\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{B}}}\frac{dx_1}{dx_4},\ m\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{B}}}\frac{dx_2}{dx_4},\ m\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{B}}}\frac{dx_3}{dx_4}$$

for the components of momentum, and for the energy (in the static case)

$$m\sqrt{B}.$$

From the expressions for the momentum, it follows that $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ plays the part of the rest mass. As $m$ is a constant peculiar to the point of mass, independently of its position, this expression, if we retain the condition $\sqrt{-g} = 1$ at spatial infinity, can vanish only when A diminishes to zero, while B increases to infinity. It seems, therefore, that such a degeneration of the co-efficients $g_{\mu\nu}$ is required by the postulate of relativity of all inertia. This requirement implies that the potential energy $m\sqrt{B}$ becomes infinitely great at infinity. Thus a point of mass can never leave the system; and a more detailed investigation shows that the same thing applies to light-rays. A system of the universe with such behaviour of the gravitational potentials at infinity would not therefore run the risk of wasting away which was mooted just now in connexion with the Newtonian theory.

I wish to point out that the simplifying assumptions as to the gravitational potentials on which this reasoning is based, have been introduced merely for the sake of lucidity. It is possible to find general formulations for the behaviour of the $g_{\mu\nu}$ at infinity which express the essentials of the question without further restrictive assumptions.

At this stage, with the kind assistance of the mathematician J. Grommer, I investigated centrally symmetrical, static gravitational fields, degenerating at infinity in the way [7]
mentioned. The gravitational potentials $g_{\mu\nu}$ were applied, and from them the energy-tensor $T_{\mu\nu}$ of matter was calculated on the basis of the field equations of gravitation. But here it proved that for the system of the fixed stars no boundary conditions of the kind can come into question at all, as was also rightly emphasized by the astronomer de Sitter recently. [8]

For the contravariant energy-tensor $T^{\mu\nu}$ of ponderable matter is given by

$$T^{\mu\nu} = \rho\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds},$$

where $\rho$ is the density of matter in natural measure. With an appropriate choice of the system of co-ordinates the stellar velocities are very small in comparison with that of light. We may, therefore, substitute $\sqrt{g_{44}}\, dx_4$ for $ds$. This shows us that all components of $T^{\mu\nu}$ must be very small in comparison with the last component $T^{44}$. But it was quite impossible to reconcile this condition with the chosen boundary conditions. In the retrospect this result does not appear astonishing. The fact of the small velocities of the stars allows the conclusion that wherever there are fixed stars, the gravitational potential (in our case $\sqrt{B}$) can never be much greater than here on earth. This follows from statistical reasoning, exactly as in the case of the Newtonian theory. At any rate, our calculations have convinced me that such conditions of degeneration for the $g_{\mu\nu}$ in spatial infinity may not be postulated.

After the failure of this attempt, two possibilities next present themselves.

(*a*) We may require, as in the problem of the planets, that, with a suitable choice of the system of reference, the $g_{\mu\nu}$ in spatial infinity approximate to the values

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

(*b*) We may refrain entirely from laying down boundary conditions for spatial infinity claiming general validity; but at the spatial limit of the domain under consideration we have to give the $g_{\mu\nu}$ separately in each individual case, as hitherto we were accustomed to give the initial conditions for time separately.

The possibility (*b*) holds out no hope of solving the problem, but amounts to giving it up. This is an incontestable position, which is taken up at the present time by de Sitter.*
But I must confess that such a complete resignation in this
[10] fundamental question is for me a difficult thing. I should not make up my mind to it until every effort to make headway toward a satisfactory view had proved to be vain.

Possibility (*a*) is unsatisfactory in more respects than one.

[9] * de Sitter, Akad. van Wetensch. te Amsterdam, 8 Nov., 1916.

In the first place those boundary conditions pre-suppose a definite choice of the system of reference, which is contrary to the spirit of the relativity principle. Secondly, if we adopt this view, we fail to comply with the requirement of the relativity of inertia. For the inertia of a material point of mass $m$ (in natural measure) depends upon the $g_{\mu\nu}$; but these differ but little from their postulated values, as given above, for spatial infinity. Thus inertia would indeed be *influenced*, but would not be *conditioned* by matter (present in finite space). If only one single point of mass were present, according to this view, it would possess inertia, and in fact an inertia almost as great as when it is surrounded by the other masses of the actual universe. Finally, those statistical objections must be raised against this view which were mentioned in respect of the Newtonian theory.

From what has now been said it will be seen that I have not succeeded in formulating boundary conditions for spatial infinity. Nevertheless, there is still a possible way out, without resigning as suggested under (*b*). For if it were possible to regard the universe as a continuum which is *finite (closed) with respect to its spatial dimensions*, we should have no need at all of any such boundary conditions. We shall proceed to show that both the general postulate of relativity and the fact of the small stellar velocities are compatible with the hypothesis of a spatially finite universe; though certainly, in order to carry through this idea, we need a generalizing modification of the field equations of gravitation.

## § 3. The Spatially Finite Universe with a Uniform Distribution of Matter

According to the general theory of relativity the metrical character (curvature) of the four-dimensional space-time continuum is defined at every point by the matter at that point and the state of that matter. Therefore, on account of the lack of uniformity in the distribution of matter, the metrical structure of this continuum must necessarily be extremely complicated. But if we are concerned with the structure only on a large scale, we may represent matter to ourselves as being uniformly distributed over enormous spaces, so that its density of distribution is a variable function which varies extremely slowly. Thus our procedure will somewhat resemble that of the geodesists who, by means of an ellipsoid, approximate to the shape of the earth's surface, which on a small scale is extremely complicated.

The most important fact that we draw from experience as to the distribution of matter is that the relative velocities of the stars are very small as compared with the velocity of light. So I think that for the present we may base our reasoning upon the following approximative assumption. There is a system of reference relatively to which matter may be looked upon as being permanently at rest. With respect to this system, therefore, the contravariant energy-
[11] tensor $T^{\mu\nu}$ of matter is, by reason of (5), of the simple form

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

The scalar $\rho$ of the (mean) density of distribution may be *a priori* a function of the space co-ordinates. But if we assume the universe to be spatially finite, we are prompted to the hypothesis that $\rho$ is to be independent of locality. On this hypothesis we base the following considerations.

As concerns the gravitational field, it follows from the equation of motion of the material point

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} + \{\alpha\beta, \nu\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

that a material point in a static gravitational field can remain at rest only when $g_{44}$ is independent of locality. Since, further, we presuppose independence of the time co-ordinate $x_4$ for all magnitudes, we may demand for the required solution that, for all $x_\nu$,

$$g_{44} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Further, as always with static problems, we shall have to set

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

It remains now to determine those components of the gravitational potential which define the purely spatial-geometrical relations of our continuum ($g_{11}, g_{12}, \ldots g_{33}$). From our assumption as to the uniformity of distribution of the masses generating the field, it follows that the curvature of the required space must be constant. With this distribution of mass, therefore, the required finite continuum of the $x_1$, $x_2$, $x_3$, with constant $x_4$, will be a spherical space.

We arrive at such a space, for example, in the following way. We start from a Euclidean space of four dimensions, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ $\xi_4$, with a linear element $d\sigma$; let, therefore,

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

In this space we consider the hyper-surface

$$\mathrm{R}^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

where R denotes a constant. The points of this hyper-surface form a three-dimensional continuum, a spherical space of radius of curvature R.

The four-dimensional Euclidean space with which we started serves only for a convenient definition of our hyper-surface. Only those points of the hyper-surface are of interest to us which have metrical properties in agreement with those of physical space with a uniform distribution of matter. For the description of this three-dimensional continuum we may employ the co-ordinates $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ (the projection upon the hyper-plane $\xi_4 = 0$) since, by reason of (10), $\xi_4$ can be expressed in terms of $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$. Eliminating $\xi_4$ from (9), we obtain for the linear element of the spherical space the expression

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{\mathrm{R}^2 - \rho^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

where $\delta_{\mu\nu} = 1$, if $\mu = \nu$; $\delta_{\mu\nu} = 0$, if $\mu \neq \nu$, and $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. The co-ordinates chosen are convenient when it is a question of examining the environment of one of the two points $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Now the linear element of the required four-dimensional space-time universe is also given us. For the potential $g_{\mu\nu}$, both indices of which differ from 4, we have to set [12]

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{\mathrm{R}^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right) \quad . \quad (12)$$

which equation, in combination with (7) and (8), perfectly defines the behaviour of measuring-rods, clocks, and light-rays.

### § 4. On an Additional Term for the Field Equations of Gravitation

[13] My proposed field equations of gravitation for any chosen system of co-ordinates run as follows:—

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\kappa(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T), \\ G_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\nu,\alpha\} + \{\mu\alpha,\beta\}\{\nu\beta,\alpha\} \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu,\alpha\}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

The system of equations (13) is by no means satisfied when we insert for the $g_{\mu\nu}$ the values given in (7), (8), and (12), and for the (contravariant) energy-tensor of matter the values indicated in (6). It will be shown in the next paragraph how this calculation may conveniently be made. So that, if it were certain that the field equations (13) which I have hitherto employed were the only ones compatible with the postulate of general relativity, we should probably have to conclude that the theory of relativity does not admit the hypothesis of a spatially finite universe.

[14] However, the system of equations (14) allows a readily suggested extension which is compatible with the relativity postulate, and is perfectly analogous to the extension of Poisson's equation given by equation (2). For on the left-hand side of field equation (13) we may add the fundamental tensor $g_{\mu\nu}$, multiplied by a universal constant, $-\lambda$, at present unknown, without destroying the general covariance. In place of field equation (13) we write

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad . \quad . \quad (13a)$$

This field equation, with $\lambda$ sufficiently small, is in any case also compatible with the facts of experience derived from the solar system. It also satisfies laws of conservation of momentum and energy, because we arrive at (13a) in place of (13) by introducing into Hamilton's principle, instead of the scalar of Riemann's tensor, this scalar increased by a universal constant; and Hamilton's principle, of course, guarantees the validity of laws of conservation. It will be shown in § 5 that field equation (13a) is compatible with our conjectures on field and matter.

### § 5. Calculation and Result

Since all points of our continuum are on an equal footing, it is sufficient to carry through the calculation for *one* point, e.g. for one of the two points with the co-ordinates

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Then for the $g_{\mu\nu}$ in (13a) we have to insert the values

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

wherever they appear differentiated only once or not at all. We thus obtain in the first place

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}[\mu\nu, 1] + \frac{\partial}{\partial x_2}[\mu\nu, 2] + \frac{\partial}{\partial x_3}[\mu\nu, 3] + \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

From this we readily discover, taking (7), (8), and (13) into account, that all equations (13*a*) are satisfied if the two relations

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\kappa\rho}{2}, \quad -\lambda = -\frac{\kappa\rho}{2},$$

or

$$\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

are fulfilled.

Thus the newly introduced universal constant $\lambda$ defines both the mean density of distribution $\rho$ which can remain in equilibrium and also the radius R and the volume $2\pi^2 R^3$ of spherical space. The total mass M of the universe, according to our view, is finite, and is in fact

$$M = \rho \,.\, 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R}{\kappa} = \pi^2 \sqrt{\frac{32}{\kappa^3 \rho}} \quad . \quad . \quad (15)$$ [15]

Thus the theoretical view of the actual universe, if it is in correspondence with our reasoning, is the following. The curvature of space is variable in time and place, according to the distribution of matter, but we may roughly approximate to it by means of a spherical space. At any rate, this view is logically consistent, and from the standpoint of the general theory of relativity lies nearest at hand; whether, from the standpoint of present astronomical knowledge, it is tenable, will not here be discussed. In order to arrive at this consistent view, we admittedly had to introduce an extension of the field equations of gravitation which is not justified by our actual knowledge of gravitation. It is to be emphasized, however, that a positive curvature of space is given by our results, even if the supplementary term is not introduced. That term is necessary only for the purpose of making possible a quasi-static distribution of matter, as required by the fact of the small velocities of the stars.

[16]