

Inhalt

Friedman, A. (1922): Über die Krümmung des Raumes, Zeitschrift für Physik 10 (1), 377–386.

Einstein, A. (1922): Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann „Über die Krümmung des Raumes“, Zeitschrift für Physik 11 (1), 326.

Einstein, A. (1923): Notiz zu der Arbeit von A. Friedmann „Über die Krümmung des Raumes“, Zeitschrift für Physik 16 (1), 228.

Friedman, A. (1924): Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, Zeitschrift für Physik 21 (1), 326–332.

Über die Krümmung des Raumes.

Von A. Friedman in Petersburg.

Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 29. Juni 1922.)

§ 1. 1. In ihren bekannten Arbeiten über allgemeine kosmologische Fragen kommen Einstein¹⁾ und de Sitter²⁾ zu zwei möglichen Typen des Weltalls; Einstein erhält die sogenannte Zylinderwelt, in der der Raum³⁾ konstante, von der Zeit unabhängige Krümmung besitzt, wobei der Krümmungsradius verbunden ist mit der Gesamtmasse der im Raume vorhandenen Materie; de Sitter erhält eine Kugelwelt, in welcher nicht nur der Raum, sondern auch die Welt in gewissem Sinne als Welt konstanter Krümmung angesprochen werden kann⁴⁾. Dabei werden wie von Einstein so auch von de Sitter gewisse Voraussetzungen über den Materietensor gemacht, die der Inkohärenz der Materie und ihrer relativen Ruhe entsprechen, d. h. die Geschwindigkeit der Materie wird als genügend klein vorausgesetzt im Vergleich zu der Grundgeschwindigkeit⁵⁾ — der Lichtgeschwindigkeit.

Das Ziel dieser Notiz ist, erstens die Ableitung der Zylinder- und Kugelwelt (als spezielle Fälle) aus einigen allgemeinen Annahmen, und zweitens der Beweis der Möglichkeit einer Welt, deren Raumkrümmung konstant ist in bezug auf drei Koordinaten, die als Raumkoordinaten gelten, und abhängig von der Zeit, d. h. von der vierten — der Zeitkoordinate; dieser neue Typus ist, was seine übrigen Eigenschaften anbetrifft, ein Analogon der Einsteinschen Zylinderwelt.

2. Die Annahmen, die wir unseren Betrachtungen zugrunde legen, zerfallen in zwei Klassen. Zu der ersten Klasse gehören Annahmen, welche mit den Annahmen Einsteins und de Sitters zusammen-

¹⁾ Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsberichte Berl. Akad. 1917.

²⁾ de Sitter, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Monthly Notices of the R. Astronom. Soc. 1916—1917.

³⁾ Unter „Raum“ verstehen wir hier einen Raum, der durch eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen beschrieben wird; der „Welt“ entspricht eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen.

⁴⁾ Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt. Götting. Nachr. 1918.

⁵⁾ Siehe diesen Namen bei Eddington in seinem Buche: *Espace, Temps et Gravitation*, 2 Partie, S. 10. Paris 1921.

fallen; sie beziehen sich auf die Gleichungen, denen die Gravitationspotentiale genügen, und auf den Zustand und die Bewegung der Materie. Zur zweiten Klasse gehören Annahmen über den allgemeinen, sozusagen geometrischen Charakter der Welt; aus unserer Hypothese folgt als Spezialfall die Zylinderwelt Einsteins und auch die Kugelwelt de Sitters.

Die Annahmen der ersten Klasse sind die folgenden:

1. Die Gravitationspotentiale genügen dem Einsteinschen Gleichungssystem mit dem kosmologischen Gliede, das man auch gleich Null setzen darf:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \bar{R} + \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (A)$$

hier sind g_{ik} die Gravitationspotentiale, T_{ik} der Materietensor, κ — eine Konstante, $\bar{R} = g^{ik} R_{ik}$; R_{ik} ist bestimmt durch die Gleichungen

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i\alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\}, \quad (B)$$

dabei sind die x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Weltkoordinaten, und $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ die Christoffelschen Symbole zweiter Art¹⁾.

2. Die Materie ist inkohärent und in relativer Ruhe; oder, weniger streng ausgedrückt, die relativen Geschwindigkeiten der Materie sind verschwindend klein im Vergleich zu der Lichtgeschwindigkeit. Infolge dieser Annahmen ist der Materietensor durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} T_{ik} &= 0 \text{ für } i \text{ und } k \text{ nicht} = 4, \\ T_{44} &= c^2 \varrho g_{44}, \end{aligned} \quad (C)$$

hier ist ϱ die Dichte der Materie und c die Grundgeschwindigkeit; außerdem sind die Weltkoordinaten eingeteilt in drei Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und die Zeitkoordinate x_4 .

3. Die Annahmen der zweiten Klasse sind die folgenden:

I. Nach Austeilung der drei Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 haben wir einen Raum konstanter Krümmung, die aber abhängen darf von x_4 — der Zeitkoordinate. Das Intervall²⁾ ds , bestimmt durch $ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$, kann durch Einführung geeigneter Raumkoordinaten in folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) \\ &\quad + 2g_{14} dx_1 dx_4 + 2g_{24} dx_2 dx_4 + 2g_{34} dx_3 dx_4 + g_{44} dx_4^2. \end{aligned}$$

¹⁾ Das Vorzeichen von R_{ik} und von $\bar{R}$ ist bei uns von dem üblichen verschieden.

²⁾ Siehe z. B. Eddington, *Espace, Temps et Gravitation*, 2 Partie. Paris 1921.

Hier ist R nur abhängig von x_4 ; R ist proportional dem Krümmungsradius des Raumes, der also mit der Zeit veränderlich sein darf.

2. In dem Ausdrucke für ds^2 können durch entsprechende Wahl der Zeitkoordinate g_{14} , g_{24} , g_{34} zum Verschwinden gebracht werden oder, kurz gesprochen, die Zeit ist orthogonal zum Raum. Für diese zweite Annahme können, wie mir scheint, keine physikalischen oder philosophischen Gründe angegeben werden; sie dient ausschließlich zur Vereinfachung der Rechnungen. Man muß noch bemerken, daß die Welt Einsteins und de Sitters in unseren Annahmen als Spezialfall enthalten ist.

Zufolge der Annahmen 1 und 2 kann ds^2 in die Form

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + M^2 dx_4^2 \quad (D)$$

gebracht werden, wobei R eine Funktion von x_4 ist und M im allgemeinen Falle von allen vier Weltkoordinaten abhängt. Das Einsteinsche Weltall wird erhalten, wenn man in (D) R^2 durch $-\frac{R^2}{c^2}$ ersetzt und außerdem M gleich 1 setzt, wobei R den konstanten (von x_4 unabhängigen) Krümmungsradius des Raumes bedeutet. Das Weltall de Sitters wird erhalten, wenn man in (D) R^2 durch $-\frac{R^2}{c^2}$ und M durch $\cos x_1$ ersetzt:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2, \quad (D_1)$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + \cos^2 x_1 dx_4^2. \quad (D_2)$$

4. Nun müssen wir noch eine Verabredung treffen über die Grenzen, in denen die Weltkoordinaten eingeschlossen sind, d. h. darüber, welche Punkte der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit wir als verschieden ansprechen werden; ohne uns in eine nähere Begründung einzulassen, wollen wir voraussetzen, daß die Raumkoordinaten in den folgenden Intervallen eingeschlossen sind: x_1 im Intervall $(0, \pi)$; x_2 im Intervall $(0, \pi)$ und x_3 im Intervall $(0, 2\pi)$; in bezug auf die Zeitkoordinate machen wir vorläufig keine beschränkende Annahme, sondern wollen diese Frage weiter unten betrachten.

¹⁾ Das ds , von dem vorausgesetzt wird, daß es die Dimension der Zeit hat, bezeichnen wir durch $d\tau$; dann hat die Konstante κ die Dimension $\frac{\text{Länge}}{\text{Masse}}$ und ist in CGS-Einheiten gleich $1,87 \cdot 10^{-27}$. Siehe Laue, Die Relativitätstheorie, Bd. II, S. 185. Braunschweig 1921.

§ 2. 1. Aus den Annahmen (C) und (D) folgt, wenn man in den Gleichungen (A) $i = 1, 2, 3$ und $k = 4$ setzt:

$$R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0;$$

daraus ergeben sich die zwei Fälle: (1.) $R'(x_4) = 0$, R ist unabhängig von x_4 , wir wollen diese Welt als stationäre Welt bezeichnen; (2.) $R'(x_4)$ nicht $= 0$, M hängt nur von x_4 ab; dies soll die nichtstationäre Welt heißen.

Wir betrachten zuerst die stationäre Welt und schreiben die Gleichungen (A) für $i, k = 1, 2, 3$ und außerdem i nicht $= k$ hin, dann erhalten wir folgendes Formelsystem:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} - \cotg x_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} - \cotg x_1 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} - \cotg x_2 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichungen liefert folgenden Ausdruck für M :

$$M = A(x_3, x_4) \sin x_1 \sin x_2 + B(x_2, x_4) \sin x_1 + C(x_1, x_4), \quad (1)$$

wo A, B, C willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind. Lösen wir die Gleichungen (A) nach R_{ik} auf und eliminieren aus den noch nicht gebrauchten Gleichungen die unbekannte Dichte ϱ ¹⁾, so erhalten wir, wenn wir für M den Ausdruck (1) einsetzen, nach etwas langen, aber ganz elementaren Rechnungen folgende zwei Möglichkeiten für M :

$$M = M_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$M = (A_0 x_4 + B_0) \cos x_1, \quad (3)$$

wo M_0, A_0, B_0 Konstanten bedeuten.

Ist M gleich einer Konstanten, so ist die stationäre Welt die Zylinderwelt. Hier ist es vorteilhaft, mit den Gravitationspotentialen der Formel (D₁) zu operieren; bestimmen wir die Dichte und die Größe λ , so wird das bekannte Resultat Einsteins erhalten:

$$\lambda = \frac{c^2}{R^2}, \quad \varrho = \frac{2}{\pi R^2}, \quad \overline{M} = \frac{4\pi^2}{\pi} R,$$

wobei $\overline{M}$ die Gesamtmasse des Raumes bedeutet.

¹⁾ Die Dichte ϱ ist bei uns eine unbekannte Funktion der Weltkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 .

In dem zweiten möglichen Fall, wenn $\overline{M}$ durch (3) gegeben ist, kommen wir mittels einer vernünftigen Transformation von x_4 ¹⁾ zu der Kugelwelt de Sitters, in der $M = \cos x_1$ ist; mit Hilfe von (D₂) erhalten wir die Beziehungen de Sitters:

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2}, \quad \varrho = 0, \quad \overline{M} = 0.$$

Wir haben also folgendes Ergebnis: die stationäre Welt ist entweder die Einsteinsche Zylinderwelt oder die de Sittersche Kugelwelt.

2. Wir wollen nun die nichtstationäre Welt betrachten. M ist jetzt eine Funktion von x_4 ; durch entsprechende Wahl von x_4 kann man erreichen (ohne der Allgemeinheit der Betrachtung zu schaden), daß $M = 1$ wird; um an unsere gewöhnlichen Vorstellungen anzuknüpfen, geben wir ds^2 eine Form, die (D₁) und (D₂) analog ist:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2} (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2. \quad (D_3)$$

Unsere Aufgabe ist nun die Bestimmung R und ϱ aus den Gleichungen (A). Es ist klar, daß die Gleichungen (A) mit verschiedenen Indizes nichts liefern; die Gleichungen (A) für $i = k = 1, 2, 3$ geben eine Beziehung:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2R R''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \quad (4)$$

die Gleichung (A) mit $i = k = 4$ liefert die Beziehung:

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \kappa c^2 \varrho, \quad (5)$$

mit

$$R' = \frac{dR}{dx_4} \quad \text{und} \quad R'' = \frac{d^2 R}{dx_4^2}.$$

Da $R' \neq 0$ ist, so gibt die Integration der Gleichung (4), wenn wir noch t für x_4 schreiben, folgende Gleichung:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{A - R + \frac{\lambda}{3c^2} R^3}{R} \quad (6)$$

wo A eine willkürliche Konstante ist. Aus dieser Gleichung erhalten wir R durch Umkehrung eines elliptischen Integrals, d. h. durch Auflösung nach R der Gleichung

$$t = \frac{1}{c} \int_a^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3}} dx + B, \quad (7)$$

¹⁾ Diese Transformation wird durch die Formel $d\bar{x}_4 = \sqrt{A_0 x_4 + B_0} dx_4$ gegeben.

in der B und a Konstanten sind, wobei noch Rücksicht genommen werden muß auf die gewöhnlichen Bedingungen des Vorzeichenwechsels der Quadratwurzel. Aus der Gleichung (5) läßt sich ϱ bestimmen zu

$$\varrho = \frac{3A}{\pi R^3}; \quad (8)$$

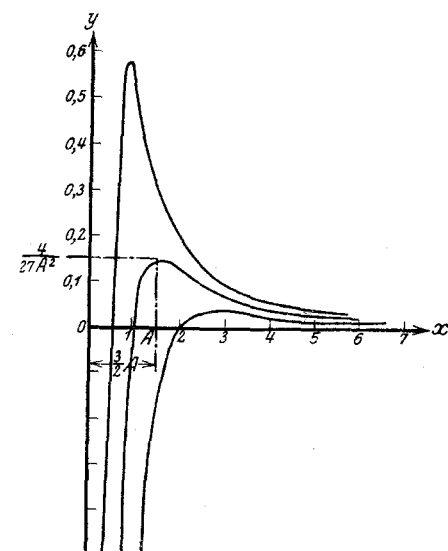
durch die Gesamtmasse des Raumes $\overline{M}$ drückt sich die Konstante A folgendermaßen aus:

$$A = \frac{\pi \overline{M}}{6 \pi^2}. \quad (9)$$

Ist $\overline{M}$ positiv, so wird A auch positiv.

3. Der Betrachtung der nichtstationären Welt müssen wir die Gleichungen (6) und (7) zugrunde legen; dabei ist die Größe λ nicht bestimmt; wir werden annehmen, daß sie beliebige Werte haben

kann. Wir bestimmen nun diejenigen Werte der Veränderlichen x , bei denen die Quadratwurzel der Formel (7) ihr Vorzeichen wechseln kann. Beschränken wir unsere Betrachtung auf positive Krümmungsradien, so genügt es, für x das Intervall $(0, \infty)$ zu betrachten und in diesem Intervall die Werte von x , die den Radikanden gleich 0 oder ∞ machen. Ein Wert von x , für den die Quadratwurzel in (7) gleich Null wird, ist $x=0$; die übrigen Werte von x , bei denen die Quadratwurzel in (7) ihr Vorzeichen wechselt, sind durch



die positiven Wurzeln der Gleichung $A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3 = 0$ gegeben.

Wir bezeichnen $\frac{\lambda}{3c^2}$ durch y und betrachten in der (x, y) -Ebene die Kurvenschar dritten Grades:

$$y x^3 - x + A = 0. \quad (10)$$

A ist hier der Parameter der Schar, der im Intervall $(0, \infty)$ variiert. Die Kurven der Schar (s. Fig.) schneiden die x -Achse im Punkte $x = A$, $y = 0$ und haben ein Maximum im Punkte

$$x = \frac{3A}{2}, \quad y = \frac{4}{27A^2}.$$

Aus der Figur ist ersichtlich, daß für negative λ die Gleichung $A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3 = 0$ eine positive Wurzel x_0 im Intervall $(0, A)$ besitzt. Betrachtet man x_0 als Funktion von λ und A :

$$x_0 = \Theta(\lambda, A),$$

so findet man, daß Θ eine zunehmende Funktion von λ und eine zunehmende Funktion von A ist. Ist λ im Intervall $\left(0, \frac{4}{9} \frac{c^2}{A^2}\right)$ gelegen, so hat die Gleichung zwei positive Wurzeln $x_0 = \Theta(\lambda, A)$ und $x'_0 = \vartheta(\lambda, A)$, wobei x_0 in das Intervall $\left(A, \frac{3A}{2}\right)$ und x'_0 in das Intervall $\left(\frac{3A}{2}, \infty\right)$ fällt; $\Theta(\lambda, A)$ ist eine zunehmende Funktion wie von λ , so auch von A , $\vartheta(\lambda, A)$ eine abnehmende Funktion von λ und A . Ist endlich λ größer als $\frac{4}{9} \frac{c^2}{A^2}$, so hat die Gleichung keine positiven Wurzeln.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Formel (7) über und schicken der Betrachtung folgende Bemerkung voraus: es sei für $t = t_0$ der Krümmungsradius gleich R_0 ; das Vorzeichen der Quadratwurzel in (7) ist für $t = t_0$ positiv oder negativ, je nachdem, ob für $t = t_0$ der Krümmungsradius wächst oder abnimmt; indem wir nötigenfalls t durch $-t$ ersetzen, können wir die Quadratwurzel immer positiv machen, d. h. durch Wahl der Zeit läßt sich immer erreichen, daß der Krümmungsradius für $t = t_0$ mit wachsender Zeit zunimmt.

4. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda > \frac{4}{9} \frac{c^2}{A^2}$, d. h. den Fall, daß die Gleichung $A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3 = 0$ keine positiven Wurzeln besitzt. Die Gleichung (7) kann dann so geschrieben werden

$$t - t_0 = \frac{1}{c} \int_{R_0}^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}} dx, \quad (11)$$

wobei zufolge unserer Bemerkung, die Quadratwurzel immer positiv ist. Daraus folgt, daß R eine zunehmende Funktion von t ist; der positive Anfangswert R_0 ist von jeder Einschränkung frei.

Da der Krümmungsradius nicht kleiner als Null sein darf, so muß er mit abnehmender Zeit t von R_0 an abnehmend im Augenblick t' den Wert Null erreichen. Die Zeit des Anwachsens von R

von 0 bis R_0 wollen wir die Zeit seit der Erschaffung der Welt nennen¹⁾; diese Zeit t' ist gegeben durch:

$$t' = \frac{1}{c} \int_0^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3}} dx. \quad (12)$$

Die betrachtete Welt bezeichnen wir als monotone Welt erster Art.

Die Zeit seit der Erschaffung der (monotonen) Welt (erster Art), betrachtet als Funktion von R_0 , A , λ , hat folgende Eigenschaften: 1. sie wächst mit wachsendem R_0 ; 2. sie nimmt ab, wenn A zunimmt, d. h. die Masse im Raume vergrößert sich; 3. sie nimmt ab, wenn λ zunimmt. Ist $A > \frac{2}{3} R_0$, so ist für ein beliebiges λ die seit der Erschaffung der Welt verflossene Zeit endlich; ist $A \leq \frac{2}{3} R_0$, so kann immer ein solcher Wert von $\lambda = \lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$ gefunden werden, daß bei Annäherung von λ an diesen Wert die Zeit seit der Erschaffung der Welt unbeschränkt zunimmt.

5. Jetzt soll λ im Intervall $(0, \frac{4c^2}{9A^2})$ liegen; dann kann der Anfangswert des Krümmungsradius in den Intervallen: $(0, x_0)$, (x_0, x'_0) , (x'_0, ∞) liegen. Fällt R_0 in das Intervall (x_0, x'_0) , so ist die Quadratwurzel in Formel (7) imaginär; ein Raum mit dieser Anfangskrümmung ist unmöglich.

Dem Falle, daß R_0 im Intervalle $(0, x_0)$ liegt, widmen wir den nächsten Abschnitt; hier betrachten wir noch den dritten Fall: $R_0 > x'_0$ oder $R_0 > \vartheta(\lambda, A)$. Durch Betrachtungen, die den vorhergehenden analog sind, läßt sich zeigen, daß R eine zunehmende Funktion der Zeit ist, wobei R mit dem Werte $x'_0 = \vartheta(\lambda, A)$ beginnen kann. Die Zeit, die von dem Augenblicke, wann $R = x'_0$ war, bis zum Augenblicke, dem $R = R_0$ entspricht, verflossen ist, nennen wir wieder die Zeit seit der Erschaffung der Welt. Sie sei t' , dann ist

$$t' = \frac{1}{c} \int_{x'_0}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3}} dx. \quad (13)$$

Diese Welt nennen wir monotone Welt zweiter Art.

¹⁾ Die Zeit seit der Erschaffung der Welt ist die Zeit, die verflossen ist von dem Augenblicke, als der Raum ein Punkt war ($R = 0$) bis zum gegenwärtigen Zustande ($R = R_0$); diese Zeit darf auch unendlich sein.

6. Wir betrachten nun den Fall, daß λ zwischen die Grenzen $(-\infty, 0)$ fällt. Ist in diesem Falle $R_0 > x_0 = \Theta(\lambda, A)$, so wird die Quadratwurzel in (7) imaginär, der Raum mit diesem R_0 ist unmöglich. Ist $R_0 < x_0$, so ist der betrachtete Fall identisch mit dem, den wir im vorigen Abschnitt beiseite gelassen haben. Wir setzen also voraus, daß λ im Intervall $(-\infty, \frac{4c^2}{9A^2})$ liege und $R_0 < x_0$ sei. Durch bekannte Erwägungen¹⁾ kann man nun zeigen, daß R eine periodische Funktion von t wird, mit der Periode t_π , wir nennen sie die Weltperiode; t_π ist durch die Formel gegeben:

$$t_\pi = \frac{2}{c} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{x}{A-x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}} dx. \quad (14)$$

Der Krümmungsradius variiert dabei zwischen 0 und x_0 . Wir wollen diese Welt die periodische Welt nennen. Die Periode der periodischen Welt nimmt zu, wenn wir λ vergrößern, und strebt gegen Unendlich, wenn λ dem Werte $\lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$ zustrebt.

Für kleine λ wird die Periode durch die Annäherungsformel

$$t_\pi = \frac{\pi A}{c} \quad (15)$$

dargestellt.

Bezüglich der periodischen Welt sind zwei Gesichtspunkte möglich: zählen wir zwei Ereignisse für zusammenfallend, wenn ihre Raumkoordinaten zusammenfallen und die Differenz der Zeitkoordinaten ein ganzes Vielfaches der Periode ist, so wächst der Krümmungsradius von 0 bis x_0 und nimmt dann bis zum Werte 0 ab; die Zeit der Weltexistenz ist endlich; andererseits, wenn die Zeit zwischen $-\infty$ und $+\infty$ variiert (d. h. wir betrachten zwei Ereignisse nur dann als zusammenfallend, wenn nicht nur ihre Raumkoordinaten, sondern auch ihre Weltkoordinaten zusammenfallen), so kommen wir zu einer wirklichen Periodizität der Raumkrümmung.

7. Unsere Kenntnisse sind vollständig ungenügend, um Zahlenrechnungen auszuführen und zu entscheiden, welche Welt unser Weltall

¹⁾ Siehe z. B. Weierstrass, Über eine Gattung reell periodischer Funktionen. Monatsber. d. Königl. Akad. d. Wissensch. 1866 und Horn, Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen. ZS. f. Math. und Physik 47, 400, 1902. In unserem Falle müssen die Betrachtungen dieser Autoren zweckentsprechend verändert werden; indessen wird die Periodizität in unserem Falle durch elementare Betrachtungen festgestellt.

ist; es ist möglich, daß das Kausalitätsproblem und das Problem der Zentrifugalkraft diese Fragen beleuchten werden. Es ist noch zu bemerken, daß die „kosmologische“ Größe λ in unseren Formeln unbestimmt bleibt, da sie eine überzählige Konstante in der Aufgabe ist; möglicherweise können elektrodynamische Betrachtungen zu ihrer Auswertung führen. Setzen wir $\lambda = 0$ und $M = 5 \cdot 10^{21}$ Sonnenmassen, so wird die Weltperiode von der Ordnung 10 Milliarden Jahren. Diese Ziffern können aber gewiß nur als eine Illustration für unsere Rechnungen gelten.

Petrograd, 29. Mai 1922.

Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann¹⁾ „Über die Krümmung des Raumes“.

Von A. Einstein in Berlin.

(Eingegangen am 18. September 1922.)

Die in der zitierten Arbeit enthaltenen Resultate bezüglich einer nichtstationären Welt schienen mir verdächtig. In der Tat zeigt sich, daß jene gegebene Lösung mit den Feldgleichungen (A) nicht verträglich ist. Aus jenen Feldgleichungen folgt nämlich bekanntlich, daß die Divergenz des Tensors T_{ik} der Materie verschwindet. Im Falle des durch (C) und (D₃) charakterisierten Ansatzes führt dies auf die Beziehung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_4} = 0,$$

welche zusammen mit (8) die zeitliche Konstanz des Weltradius R erfordert. Die Bedeutung der Arbeit besteht also gerade darin, daß sie diese Konstanz beweist.

Berlin, September 1922.

¹⁾ ZS. f. Phys. 10, 377—386, 1922.

Berichtigung

zu der Arbeit

E. Goldstein, Über Magnetkanalstrahlen und Isolator-Entladungen.

S. 180, Zeile 12 v. u. lies flacher statt flachem

S. 184, „ 9 v. o. „ geeigneterem statt geeignetem

S. 185, „ 20 v. o. „ Zustandekommen der statt Zusammen kommender.

Notiz zu der Arbeit von A. Friedmann „Über die Krümmung des Raumes“.

Von **A. Einstein** in Berlin.

(Eingegangen am 31. Mai 1923.)

Ich habe in einer früheren Notiz¹⁾ an der genannten Arbeit²⁾ Kritik geübt. Mein Einwand beruhte aber — wie ich mich auf Anregung des Herrn Krutkoff an Hand eines Briefes von Herrn Friedmann überzeugt habe — auf einem Rechenfehler. Ich halte Herrn Friedmanns Resultate für richtig und aufklärend. Es zeigt sich, daß die Feldgleichungen neben den statischen dynamische (d. h. mit der Zeitkoordinate veränderliche) zentrisch-symmetrische Lösungen für die Raumstruktur zulassen.

¹⁾ ZS. f. Phys. **11**, 326, 1922.

²⁾ Ebenda **10**, 377, 1922.

Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes.

Von A. Friedmann in Petersburg.

(Eingegangen am 7. Januar 1924.)

§ 1. 1. In unserer Notiz „Über die Krümmung des Raumes“¹⁾ haben wir diejenigen Lösungen der Einsteinschen Weltgleichungen betrachtet, welche zu Welttypen führen, denen eine konstante positive Krümmung als gemeinsames Merkmal angehört; dabei haben wir alle möglichen Fälle erörtert. Die Möglichkeit, aus den Weltgleichungen eine Welt konstanter positiver räumlicher Krümmung abzuleiten, steht aber mit der Frage nach der Endlichkeit des Raumes im Zusammenhange. Aus diesem Grunde dürfte es von Interesse sein zu untersuchen, ob man aus denselben Weltgleichungen eine Welt konstanter negativer Krümmung erhalten kann, von deren Endlichkeit (auch unter einigen ergänzenden Annahmen) wohl kaum die Rede sein kann.

In der vorliegenden Notiz wird gezeigt, daß es wirklich möglich ist, aus den Einsteinschen Weltgleichungen eine Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes abzuleiten. Wie in der zitierten Arbeit, so haben wir auch hier zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich 1. den Fall einer stationären Welt, deren Krümmung zeitlich konstant ist, und 2. den Fall einer nichtstationären Welt, deren Krümmung zwar räumlich konstant ist, wohl aber im Laufe der Zeit variiert. Zwischen den stationären Welten konstanter negativer und denjenigen konstanter positiver räumlicher Krümmung besteht ein wesentlicher Unterschied. Die Welten stationärer negativer Krümmung lassen nämlich keine positive Dichte der Materie zu; dieselbe ist entweder Null oder negativ. Die physikalisch möglichen stationären Welten (d. h. diejenigen mit nicht negativer Dichte der Materie) finden demzufolge ihr Analogon in der de Sitterschen, nicht aber in der Einsteinschen Welt²⁾.

Zum Schluß dieser Notiz werden wir die Frage berühren, ob man überhaupt auf Grund der Krümmung des Raumes über dessen Endlichkeit oder Unendlichkeit urteilen darf.

2. Wir wenden uns zu unseren allgemeinen Annahmen, die wir in dieselben zwei Klassen wie in der zitierten Notiz gruppiert denken;

¹⁾ ZS. f. Phys. 10, 377, 1922, Heft 6.

²⁾ Auf die Notwendigkeit einer besonderen Untersuchung über die Möglichkeit einer Welt mit negativem Krümmungsmaße des Raumes hat mich mein Freund Prof. Dr. Tamarkine aufmerksam gemacht.

dabei behalten wir unsere früheren Bezeichnungen. Die Annahmen der ersten Klasse bestehen darin, daß wir als Einsteinsche Weltgleichungen die Gleichungen (A), (B), (C) der erwähnten Arbeit zugrunde legen. Die Annahmen der zweiten Klasse werden jetzt von den früheren verschieden sein. Nehmen wir an, daß eine von den Weltkoordinaten, x_4 , als Zeitkoordinate bezeichnet werden darf, so können wir (für den betrachteten Fall der Welt mit negativer konstanter Krümmung des Raumes) die Annahmen der zweiten Klasse dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir fordern, es solle das Intervall ds von der Form:

$$ds^2 = \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2 \quad (D')$$

sein, wo R eine Funktion der Zeit und M eine Funktion aller vier Weltkoordinaten bedeutet. Die konstante negative Krümmung des Raumes unserer Welt ist dabei proportional $-\frac{1}{R^2}$ ¹⁾.

Beachten wir, daß für unsere Welt ds^2 eine indefinite Form ist, so können wir, unter Änderung der Bezeichnungen, die Formel (D') folgendermaßen umschreiben:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2} \frac{(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2. \quad (D'')$$

Selbstverständlich bleibt die räumliche Krümmung unserer Welt negativ und proportional $-\frac{1}{R^2}$.

Das Problem, das uns vorliegt, besteht in der Auffindung zweier Funktionen R und M , welche den Einsteinschen Weltgleichungen, d. h. den Gleichungen (A), (B) und (C) der erwähnten Notiz genügen sollen.

Setzen wir in (A) $i = 1, 2, 3$, $k = 4$, so erhalten wir die folgenden drei Gleichungen:

$$R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die betrachteten Welten zu einem der beiden Typen gehören können:

1. Typus. Stationäre Welten, $R' = 0$, R ist zeitlich konstant.
2. Typus. Nichtstationäre Welten, $R' \neq 0$, M hängt nur von der Zeit ab.

¹⁾ Bezüglich des Linienelements ds^2 siehe z. B. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* 1, 345.

Wir betrachten zunächst den Fall der stationären Welt; der Fall der nichtstationären Welt bietet eine große Ähnlichkeit mit dem der nichtstationären Welt konstanter positiver räumlicher Krümmung; aus diesem Grunde werden wir diesen zweiten Fall nur ganz kurz behandeln.

§ 2. 1. Die Gleichungen (A) liefern für die Indizes $i, k = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{x_3} \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{x_3} \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt:

$$M = \frac{P(x_1, x_4) + Q(x_2, x_4)}{x_3} + L(x_3, x_4), \quad (1)$$

wo P , Q und L zunächst willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind.

Zur Bestimmung von P , Q und L dienen uns die Gleichungen (A), wo man $i, k = 1, 2, 3$ zu setzen hat.

Die Rechnung ergibt:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\ -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\ -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} \right) + \frac{2}{x_3} \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial x_3} &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Subtrahiert man die erste Gleichung dieses Systems von der zweiten, so kommt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}.$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} P &= n(x_4) x_1^2 + a_1(x_4) + b_1(x_4), \\ Q &= n(x_4) x_2^2 + a_2(x_4) + b_2(x_4). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Beachtet man (1) und (3), so läßt sich die letzte der Gleichungen (2) in der Form:

$$-\frac{3 - \lambda R^2}{x_3^3} (P + Q) = \frac{4n}{x_3} + \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2} - \frac{2}{x_3} \frac{\partial L}{\partial x_3} \quad (4)$$

schreiben. Falls also $P + Q$ eine der Größen x_1 oder x_2 wirklich enthält, d. h. falls einer der Koeffizienten n , a_1 , a_2 von Null verschieden ist, muß der Faktor von $P + Q$ in der Gleichung (4) ver-

schwinden; die rechte Seite dieser Gleichung hängt nämlich weder von x_1 noch von x_2 ab. Der Fall, daß alle drei Größen n, a_1, a_2 verschwinden, muß gesondert betrachtet werden.

Im Falle, daß die Größen n, a_1, a_2 nicht alle drei verschwinden, muß also zwischen λ und der Krümmung des Raumes die Relation:

$$\lambda R^3 = 3 \quad (5)$$

bestehen.

Beachtet man Gl. (5), so reduzieren sich die Gleichungen (2) auf eine einzige Gleichung, welche die Funktion L bestimmt, nämlich:

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{L}{x_3} = 2n. \quad (6)$$

2. Im folgenden müssen wir zwei Fälle unterscheiden: 1. $n \neq 0$, 2. $n = 0$. Im ersten Falle zeigen uns die Formeln (D'), (1) und (3), daß die Größe n ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 1 angenommen werden darf; man kann nämlich durch eine passende Substitution $x_4 = \varphi(x_4)$ immer erreichen, daß $n = 1$ wird. Beachten wir dies, so ergibt Gl. (6):

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3} + x_3. \quad (7)$$

Um φ zu bestimmen, setzen wir in den Gleichungen (A) $i = k = 4$; eine einfache Rechnung zeigt, daß in unserem Falle φ gleich Null wird. Der erste Fall wird also durch die verschwindende Dichte der Materie und durch das Intervall:

$$ds^2 = \frac{R^2}{x_3^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4) + x_3^2}{x_3} \right)^2 dx_4^2 \quad (D'_1)$$

charakterisiert.

Gehen wir zum zweiten Falle ($n = 0$) über, so finden wir für L die Gleichung:

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3}. \quad (8)$$

Auch in diesem Falle ergibt die Rechnung für φ den Wert Null. Somit charakterisiert sich der zweite Fall ebenfalls durch die verschwindende Dichte der Materie und durch das Intervall:

$$ds^2 = \frac{R}{x_3^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left[\frac{a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4)}{x_3} \right]^2 dx_4^2. \quad (D'_2)$$

Wir betrachten endlich den Fall, daß alle drei Koeffizienten n, a_1, a_2 verschwinden, so daß M von x_1 und x_2 nicht abhängt.

Bei der Integration der Gl. (2) stoßen wir wiederum auf zwei Fälle:

$$1. \lambda R^2 = 3, \quad M = \frac{M_0(x_4)}{x_3},$$

$$2. \lambda R^2 = 1, \quad M = M(x_4),$$

wo M_0 und M willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind.

Der erste Fall erweist sich als ein Spezialfall des durch die Formel (D'_2) bestimmten Intervalls; eine leichte Rechnung zeigt, daß die Dichte ρ der Materie hier verschwindet.

Der zweite Fall¹⁾ führt, wie man sich leicht überzeugt, zu einer von Null verschiedenen Dichte der Materie. Um zu entscheiden, ob hier die Dichte positiv oder negativ ausfällt, müssen wir diejenige Form des Intervalls heranziehen, welche einer indefiniten quadratischen Form entspricht und durch die Formel (D'') ausgedrückt wird. Rechnet man mit den Gravitationspotentialen der Formel (D''), so findet man, daß im betrachteten Falle M eine Funktion von x_4 allein ist; folglich können wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, $M = 1$ setzen [dazu braucht man nur statt x_4 die Koordinate $x_4 = \varphi(x_4)$ einzuführen]. Berechnet man unter dieser Voraussetzung die Dichte ρ , so findet man:

$$\lambda = -\frac{c^2}{R^2}, \quad \rho = -\frac{2}{x R^2},$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2} \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2} + dx_4^2. \quad (D''_3)$$

Dieser Fall ergibt also für ρ einen negativen Wert.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die stationäre Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes nur bei verschwindender oder negativer Dichte der Materie möglich ist; das dieser Welt entsprechende Intervall wird durch die oben angeführten Formeln (D'_1), (D'_2) und (D''_3) ausgedrückt.

3. Wir wenden uns nun zum Fall der nichtstationären Welt. Wir bemerken zunächst, daß hier M eine Funktion von x_4 allein ist; die von uns mehrmals gebrauchten Erwägungen zeigen, daß man M der Einheit gleich annehmen darf. Unter den genannten Voraussetzungen finden wir ohne Mühe, daß die Gleichungen (A) für $i = 1, 2, 3$; $k = 4$; und für $i, k = 1, 2, 3$ von selbst erfüllt sind. Setzen wir hierin $i = k = 1, 2, 3$, so erhalten wir die zur Bestimmung der Funktion $R(x_4)$ dienende Differentialgleichung zweiter Ordnung, nämlich:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2 R R''}{R^3} + \frac{1}{R^2} - \lambda = 0. \quad (9)$$

¹⁾ Auf die Möglichkeit dieses Falles hat mich Dr. W. Fock aufmerksam gemacht.

Diese Gleichung ist völlig analog unserer früheren Gleichung [Gl. (4) der zitierten Notiz]; die letztere geht genau in Gl. (9) über, wenn man dort $c = 1$ setzt. Wir können also die ganze Diskussion der Gl. (4), i. e., auf die soeben hingeschriebene Gleichung übertragen. Demgemäß wollen wir darauf nicht eingehen, sondern berechnen nur die Dichte der Materie ρ für die nichtstationäre Welt.

Schreiben wir für den Fall der nichtstationären Welt das Intervall in der Form (D'') , so erhalten wir für R die Differentialgleichung:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2 R R''}{R^2} - \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert uns die Beziehung:

$$\frac{R'^2}{c^2} = \frac{A + R + \frac{\lambda}{3 c^2} R^3}{R},$$

wo A eine willkürliche Konstante ist. Berechnet man die Dichte ρ , so ergibt sich:

$$\rho = \frac{3 A}{\pi R^3}. \quad (10)$$

Die Formel (10) zeigt, daß für ein positives A die Dichte der Materie ebenfalls positiv ist.

Daraus folgt die Möglichkeit der nichtstationären Welten mit konstanter negativer Krümmung des Raumes und mit positiver Dichte der Materie.

§ 3. 1. Wir wenden uns zur Diskussion der physikalischen Bedeutung des in den vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultats. Wir haben uns überzeugt, daß die Einsteinschen Weltgleichungen Lösungen besitzen, die einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes entsprechen. Diese Tatsache weist darauf hin, daß die Weltgleichungen allein genommen noch nicht hinreichen, um die Frage nach der Endlichkeit unserer Welt zu entscheiden. Die Kenntnis der Krümmung des Raumes gibt uns noch keinen unmittelbaren Hinweis auf dessen Endlichkeit oder Unendlichkeit. Um zu einem bestimmten Schluß über die Endlichkeit des Raumes zu gelangen, bedarf man einiger ergänzender Verabredungen. In der Tat bezeichnen wir einen Raum als endlich, wenn der Abstand zweier beliebiger nicht zusammenfallender Punkte dieses Raumes eine gewisse konstante Zahl nicht überschreitet, was für Punktepaare wir auch nehmen mögen. Folglich müssen wir, bevor wir das Problem der Endlichkeit des Raumes angreifen, uns noch verabreden, welche Punkte dieses Raumes wir als verschieden ansehen. Fassen wir z. B. eine Kugel als eine Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes

auf, so zählen wir die Punkte, die auf demselben Breitenkreise liegen und deren Längen gerade um 360° verschieden ist, als zusammenfallend; hätten wir dagegen diese Punkte als verschieden betrachtet, so würden wir eine mehrblättrige sphärische Fläche im euklidischen Raume erhalten. Der Abstand beliebiger zweier Punkte auf einer Kugel übertrifft nicht eine endliche Zahl; wenn wir jedoch diese Kugel als eine unendlich-vielblättrige Fläche auffassen, können wir (indem wir auf gehörige Weise die Punkte verschiedenen Blättern zuordnen) diesen Abstand beliebig groß machen. Daraus erhellt, daß man, ehe man in die Betrachtungen über die Endlichkeit des Raumes eingeht, präzisieren muß, welche Punkte als zusammenfallend und welche als verschieden angesehen werden.

2. Als Kriterium für die Verschiedenheit der Punkte könnte unter anderem das Prinzip der „Phantomenangst“ dienen. Wir meinen darunter das Axiom, man könne zwischen je zwei verschiedenen Punkten nur eine gerade (geodätische) Linie führen. Nimmt man dies Prinzip an, so darf man zwei Punkte, welche durch mehr als eine gerade Linie verbunden werden können, nicht für verschieden halten. Diesem Prinzip zufolge sind z. B. die zwei Endpunkte desselben Durchmessers einer Sphäre nicht voneinander verschieden. Selbstverständlich schließt dieses Prinzip die Möglichkeit der Phantome aus, denn das Phantom erscheint im selben Punkte wie das ihn erzeugende Bild selbst.

Die soeben besprochene Formulierung des Begriffs von den zusammenfallenden und nicht zusammenfallenden Punkten kann wohl zur Vorstellung führen, daß die Räume mit positiver konstanter Krümmung endlich sind. Jedoch ermöglicht uns das erwähnte Kriterium nicht, auf die Endlichkeit der Räume negativer konstanter Krümmung zu schließen. Dies ist der Grund dafür, daß, unserer Meinung nach, Einsteins Weltgleichungen ohne ergänzende Annahmen noch nicht hinreichen, um einen Schluß über die Endlichkeit unserer Welt zu ziehen.

St. Petersburg, November 1923.

Berichtigung

zu der Arbeit: G. P. Woronkoff und G. J. Pokrowski, Über die selektive Reflexion des Lichtes an diffus reflektierenden Körpern¹⁾.

S. 364, Fig. 10. Neben die Kurve II ist zu setzen ε ; die punktierte Gerade bezieht sich auf Alexandritpapier.

S. 369, Fig. 11. Die Kurven beziehen sich auf Rhodamin B (auf Alexandritpapier), links für $\lambda = 550 \mu\mu$, rechts für $\lambda = 650 \mu\mu$.

¹⁾ ZS. f. Phys. 20, 358—370, 1923.